UNIVERSITY OF HAWAII
LIBRARY
PERIODICAL

MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK

NEUE FOLGE
DER MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK

HERAUSGEGEBEN VON
E. HLAWKA, N. HOFREITER UND J. RADON †
WIEN WIEN WIEN

SCHRIFTLEITUNG
N. HOFREITER
WIEN

60. BAND, 4. (SCHLUSS-)HEFT
MIT 2 TEXTABBILDUNGEN
AUSGEGEBEN IM NOVEMBER 1956

WIEN
SPRINGER-VERLAG
1956

Mh. Math.

Monatshefte für Mathematik

Neue Folge der Monatshefte für Mathematik und Physik

erscheinen zwanglos nach Maßgabe der eingelaufenen Arbeiten in Heften wechselnden Umfanges, die zu Bänden von 300 bis 400 Seiten vereinigt werden. Der Preis eines Heftes richtet sich nach seinem Umfang und nach den entstandenen Herstellungskosten.

Die für die Monatshefte für Mathematik bestimmten Manuskripte sind

an die Schriftleitung der Monatshefte für Mathematik, Mathematisches Institut der Universität Wien, IX., Strudlhofgasse 4,

zu senden; alle geschäftlichen Mitteilungen an

Springer-Verlag, Wien, I., Mölkerbastei 5, Tel. U 26 5 60 Serie, Telegrammadresse: Springerbuch Wien.

Grundsätzlich werden nur Arbeiten aufgenommen, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind; der Autor verpflichtet sich, diese auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen. Mit der Annahme und Veröffentlichung des Manuskriptes geht das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder auf den Verlag über. Es ist ferner ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet, photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme u. ä. von Heften der Zeitschrift, einzelnen Beiträgen oder von Teilen daraus herzustellen. Die Autoren erhalten 75 Separata ihrer Arbeit kostenlos und können maximal weitere 125 Separata zum angemessenen Preis beziehen. Die Bestellung muß mit dem dem Fahnenabzug beigelegten Bestelizettel bei der Rücksendung der korrigierten Fahnen erfolgen.

Die Manuskripte sollen in klarer Ausdrucksweise und unter Weglassung jedes überflüssigen Ballastes abgefaßt sein. Die Abbildungen, deren Zahl möglichst klein gehalten werden soll, sind dem Manuskript auf gesonderten Blättern beizugeben. Sie können entweder in Reinzeichnungen (Beschriftung nur mit Bleistift ausführen) oder in klaren verständlichen Handskizzen bestehen. Die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Autorenkorrekturen, d. h. nachträgliche Textänderungen, werden, soweit sie zehn Prozent der Satzkosten überschreiten, den Verfassern in Rechnung gestellt.

Der Verlag

60. Band/4. Heft — Inhaltsverzeichnis

Seite

Nöbauer, W. $\mathfrak{M}$-Untergruppen von Restklassengruppen 269

Florian, A. Ungleichungen über konvexe Polyeder 288

Pinl, M. Zur Integration der isotropen Komplexe in R_5 298

Vogel, W. Asymptotische Eigenschaften von Maximum-Likelihood Schätzwerten bei einem stochastischen Prozeß 313

Cooke, J. C. Some Relations between Bessel and Legendre Functions 322

Utz, W. R. A Third Order Differential Equation 329

Rembs, E. Ein Biegungsproblem mit negativer Charakteristik 333

Buchbesprechungen 337

$\mathfrak{M}$-Untergruppen von Restklassengruppen

Von

Wilfried Nöbauer, Wien

(Eingelangt am 23. März 1956)

Einleitung: Die nachfolgenden Untersuchungen sind zum Teil eine Fortsetzung meiner Arbeit „Gruppen von Restklassen nach Restpolynomidealen in mehreren Unbestimmten" [Monatsh. Math. **59**, 118—145 (1955)]. Sie fußen auf den grundlegenden Definitionen und Sätzen dieser Arbeit — die im folgenden stets als [1] zitiert wird — und schließen auch in der Bezeichnungsweise ganz an sie an.

In [1] wurde der Begriff der „natürlichen Untergruppe" eingeführt. Wir haben dort am Beginn von § 2 gesagt, daß wir als natürliche Untergruppe eine Untergruppe von $\mathfrak{G}_n^k$ bezeichnen, deren Elemente sich alle durch Polynomvektoren von ganz bestimmter Gestalt repräsentieren lassen. Als Beispiele solcher Untergruppen haben wir die Gruppen ${}_l\mathfrak{G}_n^k$ (ab § 2), die Gruppen ${}_l\mathfrak{M}_n^k$ (in § 14) und die Gruppen ${}_l\mathfrak{P}_n^k$ (in § 15) betrachtet. In dieser Arbeit hier soll nun der vielleicht etwas unscharf umrissene Begriff der natürlichen Untergruppe ersetzt werden durch den der $\mathfrak{M}$-Untergruppe. Dieser Begriff wird zunächst so allgemein wie möglich gefaßt, im Laufe der Untersuchungen werden wir dann aber verschiedene Spezialisierungen vornehmen. Schließlich werden wir auch noch einige neue Beispiele von $\mathfrak{M}$-Untergruppen betrachten und die erhaltenen allgemeinen Sätze und Methoden darauf anwenden.

§ 1. Es sei $k \geqq 1$ eine feste natürliche Zahl. Jeder natürlichen Zahl n sei eine Menge von Polynomvektoren $\mathfrak{M}(n)$ aus Γ_k eindeutig zugeordnet. Mit $\mathfrak{V}_n^k$ bezeichnen wir die Menge aller Elemente von $\Gamma_k \mid A_k^n$, die einen Vertreter in $\mathfrak{M}(n)$ haben. Weiter setzen wir

$$\mathfrak{U}_n^k = \mathfrak{V}_n^k \cap \mathfrak{G}_n^k \tag{1}$$

Wir erhalten durch (1) zu jeder Gruppe $\mathfrak{G}_n^k$ ($n=1, 2, \ldots$) einen (eventuell auch leeren) Komplex $\mathfrak{U}_n^k \subset \mathfrak{G}_n^k$.

Es sei $\{n\}$ die Menge aller n, für welche $\mathfrak{U}_n^k$ eine Untergruppe von $\mathfrak{G}_n^k$ ist — diese Menge kann auch leer sein; wir bezeichnen $\{n\}$ als Erklärungsbereich der $\mathfrak{M}$-Untergruppe $\mathfrak{U}_n^k$ und $\mathfrak{U}_n^k$ selbst als $\mathfrak{M}$-Untergruppe; $\mathfrak{U}_n^k$ ist also nicht eine einzelne Gruppe, sondern eine Menge von Gruppen, deren Elemente den Zahlen von $\{n\}$ eineindeutig zugeordnet sind. Natürlich hängen $\{n\}$ und $\mathfrak{U}_n^k$ ab von den Mengen $\mathfrak{M}(n)$, von denen man ausgeht.

Wir bezeichnen im folgenden einen Polynomvektor von $\mathfrak{M}(n)$ stets als n-Normalvektor und einen Vertreter eines Elementes F von $\Gamma_k \mid A_k^n$, der zu $\mathfrak{M}(n)$ gehört, als Normalvertreter von F.

Die Zahlen $m \in \{n\}$ werden charakterisiert durch folgenden Satz, dessen Richtigkeit unmittelbar einzusehen ist: Dann und nur dann gilt $m \in \{n\}$, wenn zu je zwei Normalvertretern $\mathfrak{f}(\mathfrak{x})$ und $\mathfrak{g}(\mathfrak{x})$ für $\mathfrak{U}_m^k$ ein m-Normalvektor $\mathfrak{h}(\mathfrak{x})$ mit

$$\mathfrak{h}(\mathfrak{x}) \equiv \mathfrak{f}(\mathfrak{g}(\mathfrak{x})) \mod A_k^m \tag{2}$$

vorhanden ist.

Daraus folgt sogleich: Es gilt $m \in \{n\}$, wenn zu je zwei m-Normalvektoren $\mathfrak{f}(\mathfrak{x})$ und $\mathfrak{g}(\mathfrak{x})$ ein m-Normalvektor $\mathfrak{h}(\mathfrak{x})$ vorhanden ist, welcher (2) erfüllt. Daraus wieder ergibt sich folgender

Satz 1: *Die natürliche Zahl m gehört zum Erklärungsbereich der* $\mathfrak{M}$-*Untergruppe* $\mathfrak{U}_n^k$, *wenn mit* $\mathfrak{f}(\mathfrak{x})$ *und* $\mathfrak{g}(\mathfrak{x})$ *stets auch* $\mathfrak{f}(\mathfrak{g}(\mathfrak{x}))$ *ein m-Normalvektor ist.*

Wir nehmen im folgenden stets die Gültigkeit folgender Voraussetzung für $\mathfrak{U}_n^k$ an:

V 1: *Der Erklärungsbereich von* $\mathfrak{U}_n^k$ *bestehe aus allen natürlichen Zahlen.*

§ 2. Nun untersuchen wir, wie die Struktur von $\mathfrak{U}_n^k$ mit dem multiplikativen Aufbau von n zusammenhängt.Wir führen zunächst folgende Voraussetzung ein:

V 2: *Wenn* $m \mid n$, *so gilt* $\mathfrak{M}(n) \subseteq \mathfrak{M}(m)$.

Nun beweisen wir die Gültigkeit von

Satz 2: *Gilt V 2, dann ist für* $n = ab$ *mit* $(a, b) = 1$ *stets* $\mathfrak{U}_n^k$ *eine Untergruppe des direkten Produktes* $\mathfrak{U}_a^k \times \mathfrak{U}_b^k$.

Man betrachte nämlich die nach [1], § 4 stets mögliche Zerlegung von $\mathfrak{G}_n^k$ in das direkte Produkt $\mathfrak{G}_a^k \times \mathfrak{G}_b^k$. Wie dort gezeigt wurde, erfolgt diese Zerlegung, indem jedem $F \in \mathfrak{G}_n^k$ das Paar F_a, F_b aus $\mathfrak{G}_a^k$ bzw. $\mathfrak{G}_b^k$ zugeordnet wird, das irgendein Vertretervektor $\mathfrak{f}(\mathfrak{x})$ von F repräsentiert. Gilt nun $F \in \mathfrak{U}_n^k$, so kann $\mathfrak{f}(\mathfrak{x})$ aus $\mathfrak{M}(n)$ gewählt werden, wegen

V 2 gilt daher $\mathfrak{f}(\mathfrak{x}) \in \mathfrak{M}(a)$ und $\mathfrak{f}(\mathfrak{x}) \in \mathfrak{M}(b)$, daher gilt $F_a \in \mathfrak{U}_a^k$ und $F_b \in \mathfrak{U}_b^k$.

Wir beweisen nun zunächst: Ist V 2 erfüllt und $n = ab$ mit $(a, b) = 1$, so gilt dann und nur dann die Beziehung

$$\mathfrak{U}_n^k = \mathfrak{U}_a^k \times \mathfrak{U}_b^k \tag{3}$$

wenn zu jedem Paar $\mathfrak{f}_a(\mathfrak{x})$, $\mathfrak{f}_b(\mathfrak{x})$ von Normalvertretern aus $\mathfrak{U}_a^k$ bzw. $\mathfrak{U}_b^k$ ein n-Normalvektor $\mathfrak{f}_n(\mathfrak{x})$ existiert, der die Kongruenz

$$u\mathfrak{f}_a(\mathfrak{x}) + v\mathfrak{f}_b(\mathfrak{x}) \equiv \mathfrak{f}_n(\mathfrak{x}) \mod A_k^n \tag{4}$$

erfüllt. u und v sind dabei die in [1], § 4 eingeführten Zahlen.

Ist nämlich $\mathfrak{f}_a(\mathfrak{x})$, $\mathfrak{f}_b(\mathfrak{x})$ so ein Paar, das die Elemente $F_a \in \mathfrak{U}_a^k$ und $F_b \in \mathfrak{U}_b^k$ vertreten möge, so wird das eindeutig bestimmte Element von $\mathfrak{G}_n^k$, dem das Paar F_a, F_b zugeordnet ist, nach [1], § 4 vertreten durch den Polynomvektor

$$u\mathfrak{f}_a(\mathfrak{x}) + v\mathfrak{f}_b(\mathfrak{x})$$

Gilt nun (3), so gehört dieses Element zu $\mathfrak{U}_n^k$, besitzt also einen n-Normalvektor als Vertreter, so daß (4) gilt. Daß umgekehrt (3) aus (4) folgt, ergibt sich unter Beachtung von Satz 2 ganz ähnlich.

Wir bezeichnen eine $\mathfrak{M}$-Untergruppe $\mathfrak{U}_n^k$ als multiplikativ, wenn für $n = ab$ mit $(a, b) = 1$ stets (3) erfüllt ist.

Aus dem oben bewiesenen Satz ergibt sich nun sogleich folgender

Satz 3: *Die $\mathfrak{M}$-Untergruppe $\mathfrak{U}_n^k$ ist multiplikativ, wenn V 2 erfüllt ist und für $n = ab$ mit $(a, b) = 1$ stets zu jedem Paar*

$$\mathfrak{f}_a(\mathfrak{x}) \in \mathfrak{M}(a) \qquad \mathfrak{f}_b(\mathfrak{x}) \in \mathfrak{M}(b)$$

ein $\mathfrak{f}_n(\mathfrak{x}) \in \mathfrak{M}(n)$ existiert, so daß gilt:

$$\mathfrak{f}_n(\mathfrak{x}) \equiv u\mathfrak{f}_a(\mathfrak{x}) + v\mathfrak{f}_b(\mathfrak{x}) \mod A_k^n$$

Daraus ergibt sich weiter sogleich folgender, für die praktische Anwendung nützlicher

Satz 4: *Die $\mathfrak{M}$-Untergruppe $\mathfrak{U}_n^k$ ist sicher multiplikativ, wenn $\mathfrak{M}(n) = \mathfrak{M}$ von n unabhängig und als Teilmenge des Vektorraumes Γ_k ein Modul ist.*

Weiter gilt folgender

Satz 5: *Ist V 2 erfüllt, so ist für $m \mid n$ stets eine Homomorphie von $\mathfrak{U}_n^k$ in $\mathfrak{U}_m^k$ möglich.*

Beweis: Ist $F \in \mathfrak{U}_n^k$ und $\mathfrak{f}(\mathfrak{x})$ Normalvertreter von F, so gilt:

$$\mathfrak{f}(\mathfrak{x}) \in \mathfrak{M}(n) \subseteq \mathfrak{M}(m)$$

$\mathfrak{f}(\mathfrak{x})$ erzeugt ein volles Vektorsystem mod n, daher auch ein volles Vektorsystem mod m, vertritt also ein Element $\overline{F}$ von $\mathfrak{U}_m^k$, das wir dem F als Bild zuordnen. Da ein Restpolynomvektor mod n auch Restpolynomvektor mod m ist, ist dieses $\overline{F}$ eindeutig bestimmt. Ist G ein weiteres Element von $\mathfrak{U}_n^k$ mit dem Normalvertreter $\mathfrak{g}(\mathfrak{x})$, so wird FG vertreten durch $\mathfrak{f}(\mathfrak{g}(\mathfrak{x}))$; das Bild $\overline{FG}$ von FG wird daher auch durch $\mathfrak{f}(\mathfrak{g}(\mathfrak{x}))$ vertreten, ist also gleich $\overline{F}\,\overline{G}$.

Wir bezeichnen eine $\mathfrak{M}$-Untergruppe $\mathfrak{U}_n^k$ als teilertreu, wenn für $m \mid n$ stets $\mathfrak{U}_m^k$ homomorphes Bild von $\mathfrak{U}_n^k$ ist.

Aus Satz 5 ergibt sich sogleich

Satz 6: Bei Erfülltsein von V 2 ist eine hinreichende Bedingung dafür, daß die $\mathfrak{M}$-Untergruppe $\mathfrak{U}_n^k$ teilertreu ist: Wenn $m \mid n$ und $\bar{\mathfrak{f}}(\mathfrak{x})$ ein gegebener Normalvertreter von $\mathfrak{U}_m^k$ ist, so gibt es stets einen Normalvertreter $\mathfrak{f}(\mathfrak{x})$ von $\mathfrak{U}_n^k$, so daß

$$\mathfrak{f}(\mathfrak{x}) \equiv \bar{\mathfrak{f}}(\mathfrak{x}) \mod A_k^m$$

Satz 7: Ist V 2 erfüllt, $\mathfrak{U}_n^k$ multiplikativ und gilt $\mathfrak{M}(p^r) = \mathfrak{M}(p)$ für jedes $r \geqq 1$ und jede Primzahl p, so ist $\mathfrak{U}_n^k$ dann und nur dann teilertreu, wenn für jede Primzahl p das $\mathfrak{U}_p^k$ homomorphes Bild von $\mathfrak{U}_{p^2}^k$ ist.

Beweis: Daß die Bedingung des Satzes notwendig ist, ist klar. Daß sie aber auch hinreichend ist, sieht man folgendermaßen: Zunächst ist auch für $e > 2$ stets $\mathfrak{U}_p^{k e-1}$ homomorphes Bild von $\mathfrak{U}_p^{k e}$. Ist nämlich $\overline{F} \in \mathfrak{U}_p^{k e-1}$ und $\bar{\mathfrak{f}}(\mathfrak{x})$ Normalvertreter für $\overline{F}$, so erzeugt $\bar{\mathfrak{f}}(\mathfrak{x})$ ein volles Vektorsystem mod p^{e-1} und liegt in $\mathfrak{M}(p)$, erzeugt daher nach [1], Hilfssatz 2a auch ein volles Vektorsystem mod p^e und liegt nach Voraussetzung in $\mathfrak{M}(p^e)$, vertritt also ein Element $F \in \mathfrak{U}_{p^e}^{k e}$, das bei der Homomorphie von Satz 5 auf $\overline{F}$ abgebildet wird. Es ist deshalb unter den Voraussetzungen von Satz 7 stets $\mathfrak{U}_p^{k e-\nu}$ homomorphes Bild von $\mathfrak{U}_p^{k e}$. Ist nun

$$n = \Pi\, p_\nu^{e_\nu} \qquad m = \Pi\, p_\nu^{f_\nu} \qquad (f_\nu \leqq e_\nu)$$

so gilt nach Voraussetzung und dem bisher bewiesenen, wenn wir zu Vereinfachung vorübergehend setzen $\mathfrak{U}_n^k = \mathfrak{G}(n)$ und homomorphe Abbildung durch einen Pfeil ausdrücken:

$$\mathfrak{G}(n) = \Pi\, \mathfrak{G}(p_\nu^{e_\nu}) \to \Pi\, \mathfrak{G}(p_\nu^{f_\nu}) = \mathfrak{G}(m)$$

§ 3. Wir nehmen an, daß die Voraussetzung V 2 erfüllt sei. Nach Satz 5 ist dann stets eine Homomorphie von $\mathfrak{U}_p^{k e}$ in $\mathfrak{U}_p^{k e-1}$ möglich. Wir wollen zu gegebenem $F \in \mathfrak{U}_p^{k e-1}$ alle Elemente von $\mathfrak{U}_p^{k e}$ ermitteln, die bei dieser Homomorphie auf F abgebildet werden.

Um hier praktisch anwendbare Ergebnisse zu erhalten, hat man wieder gewisse einschränkende Voraussetzungen zu machen. Wir führen also ein die Voraussetzung

V 3: Ist $\mathfrak{D}(p^e, p^{e-1})$ *die Menge aller Polynomvektoren der Gestalt*

$$\mathfrak{g}(\mathfrak{x}) - \mathfrak{f}(\mathfrak{x}) \qquad \mathfrak{g}(\mathfrak{x}) \in \mathfrak{M}(p^e),\ \mathfrak{f}(\mathfrak{x}) \in \mathfrak{M}(p^{e-1})$$

so gilt stets:

$$\mathfrak{h}(\mathfrak{x}) + \mathfrak{d}(\mathfrak{x}) \in \mathfrak{M}(p^e), \text{ wenn } \mathfrak{h}(\mathfrak{x}) \in \mathfrak{M}(p^{e-1}) \text{ und } \mathfrak{d}(\mathfrak{x}) \in \mathfrak{D}(p^e, p^{e-1})$$

Wir bezeichnen nun mit $\mathfrak{H}$ die Gesamtheit der Restklassen nach $A_k^{p^e}$, welche einen Vertreter in $\mathfrak{D}(p^e, p^{e-1})$ haben und setzen (in der Bezeichnungsweise von [1], § 9)

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{H} \cap {}_0\mathfrak{A}_k^{p^e}$$

$\mathfrak{L}$ ist also die Gesamtheit der Restklassen von $\mathfrak{H}$, deren Polynomvektoren Restpolynomvektoren mod p^{e-1} sind. Unter einem Normalvertreter von $\mathfrak{L}$ verstehen wir einen Vertreter eines Elementes von $\mathfrak{L}$, der in $\mathfrak{D}(p^e, p^{e-1})$ liegt. Nun beweisen wir:

Satz 8: Man erhält bei Gültigkeit von V 3 ein genaues Normalvertretersystem der Elemente von $\mathfrak{U}_{p^e}^k$, *die bei der Homomorphie von* $\mathfrak{U}_{p^e}^k$ *in* $\mathfrak{U}_{p^{e-1}}^k$ *auf ein bestimmtes Element* $F \in \mathfrak{U}_{p^{e-1}}^k$ *abgebildet werden, wenn man mit einem Normalvertreter* $\mathfrak{f}(\mathfrak{x})$ *für* F *die Gesamtheit der Polynomvektoren*

$$\mathfrak{h}(\mathfrak{x}) = \mathfrak{f}(\mathfrak{x}) + \mathfrak{d}(\mathfrak{x}) \tag{5}$$

bildet, wobei $\mathfrak{d}(\mathfrak{x})$ *im Falle* $e > 2$ *alle Vektoren eines genauen Normalvertretersystems für* $\mathfrak{L}$ *durchläuft, im Falle* $e = 2$ *alle jene Vektoren eines genauen Normalvertretersystemes für* $\mathfrak{L}$, *bei welchen die Bedingung*

$$D(\mathfrak{f}(\mathfrak{x}) + \mathfrak{d}(\mathfrak{x})) \not\equiv 0 \mod p \tag{6}$$

für jeden ganzzahligen Vektor $\mathfrak{x}$ *erfüllt ist* (D *bedeutet wie in* [1] *Bildung der Funktionaldeterminante*).

Beweis: Ist G ein Element von $\mathfrak{U}_{p^e}^k$, das auf F abgebildet wird, und $\mathfrak{g}(\mathfrak{x})$ ein Normalvertreter für G, so ist $\mathfrak{g}(\mathfrak{x})$ auch Vertreter von F. Daher ist $\mathfrak{g}(\mathfrak{x}) - \mathfrak{f}(\mathfrak{x})$ Restpolynomvektor mod p^{e-1} und Vektor aus $\mathfrak{D}(p^e, p^{e-1})$, also Vertreter einer Restklasse aus $\mathfrak{L}$. In dem gegebenen Normalvertretersystem für $\mathfrak{L}$ gibt es also einen Vektor $\mathfrak{d}(\mathfrak{x})$, so daß

$$\mathfrak{g}(\mathfrak{x}) - \mathfrak{f}(\mathfrak{x}) \equiv \mathfrak{d}(\mathfrak{x}) \mod A_k^{p^e}$$

also

$$\mathfrak{g}(\mathfrak{x}) \equiv \mathfrak{f}(\mathfrak{x}) + \mathfrak{d}(\mathfrak{x}) \mod A_k^{p^e}$$

Im Falle $e = 2$ folgt daraus, daß $\mathfrak{g}(\mathfrak{x})$ und daher auch $\mathfrak{f}(\mathfrak{x}) + \mathfrak{d}(\mathfrak{x})$ ein

volles Vektorsystem mod p^2 erzeugt, nach [1], Hilfssatz 2 das Erfülltsein von (6).

Jeder der Vektoren (5) gehört wegen V 3 zu $\mathfrak{M}(p^e)$ und erzeugt ein volles Vektorsystem mod p^{e-1} — $\mathfrak{d}(\mathfrak{x})$ ist ja stets Restpolynomvektor mod p^{e-1} — daher auch ein volles Vektorsystem mod p^e nach [1], Hilfssatz 2a bzw. im Falle $e = 2$ nach [1], Hilfssatz 2. Daher ist er Normalvertreter eines Elementes von $\mathfrak{U}_p^{k_e}$ und dieses Element hat ersichtlich F zum Bild.

Würden zwei Polynomvektoren (5) dasselbe Element von $\mathfrak{U}_p^{k_e}$ vertreten, so wäre ihre Differenz Restpolynomvektor mod p^e, also wäre unter den $\mathfrak{d}(\mathfrak{x})$ eine Restklasse nach $A_k^{p^e}$ mindestens zweimal vertreten.

Wir werden Satz 8 später bei der Untersuchung einiger spezieller Beispiele von $\mathfrak{M}$-Untergruppen anwenden. Für diese Anwendungen nützlich ist folgender

Satz 9: Es ist V 3 erfüllt, wenn $\mathfrak{M}(p^e) = \mathfrak{M}(p^{e-1})$ und ein Modul ist.

Dann gilt nämlich

$$\mathfrak{D}(p^e, p^{e-1}) \subseteq \mathfrak{M}(p^e) \tag{7}$$

und damit V 3.

Bei praktischer Anwendung von Satz 8 hat man nun folgendermaßen vorzugehen:

1. Man ermittelt $\mathfrak{D}(p^e, p^{e-1})$. Dies ist sehr leicht, wenn die Voraussetzungen von Satz 9 erfüllt sind; dann gilt nämlich (7), wie wir schon festgestellt haben; da aber in diesem Falle $\mathfrak{M}(p^e)$ auch den Nullvektor enthält, gilt auch:

$$\mathfrak{M}(p^e) \subseteq \mathfrak{D}(p^e, p^{e-1})$$

also haben wir

$$\mathfrak{D}(p^e, p^{e-1}) = \mathfrak{M}(p^e)$$

2. Man sucht sich ein genaues Normalvertretersystem für $\mathfrak{L}$. Dies geschieht am besten, indem man alle Vektoren aus $\mathfrak{D}(p^e, p^{e-1})$ aufsucht, welche Restpolynomvektoren mod p^{e-1} sind, und daraus ein genaues System mod $A_k^{p^e}$ inkongruenter Vektoren auswählt.

3. Ist nun $e > 2$, so braucht man bloß mit diesem Vertretersystem noch alle Vektoren (5) zu bilden. Im Falle $e = 2$ hat man die Vektoren (5) zu bilden und daraus alle die auszuwählen, welche (6) erfüllen.

§ 4. In den bisherigen Überlegungen war k stets eine festgehaltene Zahl. Wir nehmen nun aber an, daß auch k, ebenso wie n, alle natürlichen Zahlen durchlaufe. Es sei also nun jedem Zahlenpaar (n, k) eine Menge $\mathfrak{M}(n, k)$ von Polynomvektoren aus Γ_k eindeutig zugeordnet. Wir

definieren wieder $\mathfrak{U}_n^k$ durch (1); der Erklärungsbereich von $\mathfrak{U}_n^k$ wird dann eine Menge von Zahlenpaaren (n, k). Wir nehmen auch wieder die Gültigkeit von V 1 für $\mathfrak{U}_n^k$ an:

V 1: Der Erklärungsbereich von $\mathfrak{U}_n^k$ besteht aus allen Paaren von natürlichen Zahlen.

Will man allgemeine Aussagen über $\mathfrak{U}_n^k$ machen, so muß man wieder einschränkende Voraussetzungen über $\mathfrak{M}(n, k)$ einführen:

Es sei im folgenden stets $\mathfrak{x}_k=(x_1, x_2 \ldots x_k)$ und $k > 1$. Wir streichen in sämtlichen Polynomvektoren von $\mathfrak{M}(n, k)$ die k-te Komponente. So erhalten wir eine Menge $\mathfrak{M}'(n, k)$ von $(k—1)$-dimensionalen Polynomvektoren über $\Gamma[\mathfrak{x}_k]$. Wir führen nun folgende Voraussetzung ein:

V 4: Es soll stets gelten $\mathfrak{M}'(n, k) \subseteq \mathfrak{M}(n, k—1)$.

Nun beweisen wir folgenden

Satz 10: Ist V 4 erfüllt, so läßt sich $\mathfrak{U}_n^k$ stets homomorph abbilden in $\mathfrak{U}_n^{k-1}$.

Ist nämlich $F \in \mathfrak{U}_n^k$ gegeben und $\mathfrak{f}(\mathfrak{x})$ Normalvertreter dafür, also ein Vektor aus $\mathfrak{M}(n, k)$, so entfernen wir die k-te Komponente des $\mathfrak{f}(\mathfrak{x})$ und erhalten einen Vektor $\bar{\mathfrak{f}}(\mathfrak{x}) \in \mathfrak{M}(n, k—1)$. Dieser erzeugt ein volles Vektorsystem mod n. Es ist ja doch

$$\mathfrak{f}(\mathfrak{x}) \equiv \mathfrak{t} \mod n \tag{8}$$

für jeden ganzzahligen Vektor $\mathfrak{t}$ lösbar, also auch dann, wenn die ersten $k—1$ Komponenten von $\mathfrak{t}$ einen gegebenen Vektor $\bar{\mathfrak{t}}$ bilden. Ist $\mathfrak{u}_k$ ein Lösungsvektor von (8) und $\mathfrak{u}_{k-1}$ der daraus durch Streichen der k-ten Komponente entstandene Vektor, so gilt:

$$\bar{\mathfrak{f}}(\mathfrak{u}_{k-1}) \equiv \bar{\mathfrak{t}} \mod n$$

denn wegen V 4 kommt x_k nur in der k-ten Komponente von $\mathfrak{f}(\mathfrak{x})$ vor. $\bar{\mathfrak{f}}(\mathfrak{x})$ vertritt also ein Element $\overline{F}$ aus $\mathfrak{U}_n^{k-1}$, das wir dem F als Bild zuordnen.

Daß dieses Bild $\overline{F}$ eindeutig bestimmt ist, ist sehr leicht einzusehen: Geht man von einem anderen Normalvertreter $\mathfrak{g}(\mathfrak{x})$ für F aus, so ist $\mathfrak{f}(\mathfrak{x}) — \mathfrak{g}(\mathfrak{x})$ Restpolynomvektor mod n, daher auch $\bar{\mathfrak{f}}(\mathfrak{x}) — \bar{\mathfrak{g}}(\mathfrak{x})$ Restpolynomvektor mod n.

Es seien nun F, G zwei Elemente aus $\mathfrak{U}_n^k$ mit den Normalvertretern $\mathfrak{f}(\mathfrak{x})$, $\mathfrak{g}(\mathfrak{x})$. Es sei $\mathfrak{h}(\mathfrak{x})$ Normalvertreter von FG; dann gilt

$$\mathfrak{h}(\mathfrak{x}) \equiv \mathfrak{f}(\mathfrak{g}(\mathfrak{x})) \mod A_k^n$$

Um Normalvertreter für die Bilder $\overline{F}$, $\overline{G}$ und $\overline{FG}$ zu erhalten, brauche

ich in den Vektoren $\mathfrak{f}(\mathfrak{x})$, $\mathfrak{g}(\mathfrak{x})$, $\mathfrak{h}(\mathfrak{x})$ bloß die k-ten Komponenten zu entfernen. Bei der Bildung von $\mathfrak{f}(\mathfrak{g}(\mathfrak{x}))$ werden in $\mathfrak{f}(\mathfrak{x})$ alle x_ν durch die entsprechenden Komponenten $g_\nu(\mathfrak{x})$ von $\mathfrak{g}(\mathfrak{x})$ ersetzt. Da nun die ersten k—1 Komponenten von $\mathfrak{f}(\mathfrak{x})$ wegen V 4 das x_k nicht enthalten, wird in sie nur $g_1(\mathfrak{x}) \ldots g_{k-1}(\mathfrak{x})$ eingesetzt; daraus erkennt man, daß gilt:

$$\bar{\mathfrak{f}}(\mathfrak{g}(\mathfrak{x})) = \bar{\mathfrak{f}}(\bar{\mathfrak{g}}(\mathfrak{x}))$$

also haben wir

$$\bar{\mathfrak{h}}(\mathfrak{x}) \equiv \bar{\mathfrak{f}}(\mathfrak{g}(\mathfrak{x})) \equiv \bar{\mathfrak{f}}(\bar{\mathfrak{g}}(\mathfrak{x})) \bmod A_{k-1}^n$$

das heißt: $\overline{FG} = \overline{F}\,\overline{G}$.

Wir fragen uns nun, unter welchen weiteren Voraussetzungen die Homomorphie von Satz 10 ein Homomorphismus ist. Von den Voraussetzungen, aus denen dies gefolgert werden kann, betrachten wir nur die einfache Voraussetzung

V 5: Zu jedem Polynomvektor $\bar{\mathfrak{f}}(\mathfrak{x}) \in \mathfrak{M}(n, k\text{—}1)$ *soll der daraus durch Anhängen von* x_k *als letzte Komponente entstehende Polynomvektor* $(\bar{\mathfrak{f}}(\mathfrak{x}), x_k)$ *in* $\mathfrak{M}(n, k)$ *liegen.*

Wir beweisen nun

Satz 11: Gilt V 4 und V 5, so ist $\mathfrak{U}_n^{k-1}$ *homomorphes Bild von* $\mathfrak{U}_n^k$.

Ist nämlich $F \in \mathfrak{U}_n^{k-1}$ und $\bar{\mathfrak{f}}(\mathfrak{x})$ Normalvertreter für F, also ein Polynomvektor aus $\mathfrak{M}(n, k\text{—}1)$, so bilden wir den Vektor

$$\mathfrak{f}(\mathfrak{x}) = (\bar{\mathfrak{f}}(\mathfrak{x}), x_k) \in \mathfrak{M}(n, k).$$

Wie man leicht einsieht, erzeugt $\mathfrak{f}(\mathfrak{x})$ ein volles Vektorsystem mod n, ist also Normalvertreter eines Elementes von $\mathfrak{U}_n^k$, welches bei der Homomorphie von Satz 10 das gegebene Element F aus $\mathfrak{U}_n^{k-1}$ zum Bild hat.

Nach Satz 10 ist bei Erfülltsein von V 4 stets eine Homomorphie von $\mathfrak{U}_n^k$ in $\mathfrak{U}_n^{k-1}$ möglich, also ein Homomorphismus von $\mathfrak{U}_n^k$ auf eine Untergruppe $\mathfrak{V}_n^{k-1} \subset \mathfrak{U}_n^{k-1}$. Alle die Elemente von $\mathfrak{U}_n^k$, die dabei auf das Einheitselement E abgebildet werden, bilden einen Normalteiler $\mathfrak{N}_n^k \subset \mathfrak{U}_n^k$. Über diesen Normalteiler beweisen wir nun

Satz 12: Der Normalteiler $\mathfrak{N}_n^k \subset \mathfrak{U}_n^k$ *besteht genau aus den Elementen von* $\mathfrak{U}_n^k$, *die einen Vertretervektor der Gestalt* $(\mathfrak{x}_{k-1}, g(\mathfrak{x}))$ *besitzen, es gilt also:*

$$\mathfrak{N}_n^k = \mathfrak{U}_n^k \cap {}_{k-1}\mathfrak{G}_n^k \tag{9}$$

Ist nämlich $V \in \mathfrak{N}_n^k$ und $\mathfrak{v}(\mathfrak{x})$ Normalvertreter von V, so bilden wir daraus durch Entfernen der k-ten Komponente den Vektor $\bar{\mathfrak{v}}(\mathfrak{x})$; dieser ist Vertreter des Bildelementes von V in $\mathfrak{U}_n^{k-1}$, also von E, es gilt daher:

$$\bar{\mathfrak{v}}(\mathfrak{x}) \equiv \mathfrak{x}_{k-1} \bmod A_{k-1}^n$$

daher besitzt V einen Vertretervektor der Gestalt $(\mathfrak{x}_{k-1}, g(\mathfrak{x}))$. Besitzt

umgekehrt $V \in \mathfrak{U}_n^k$ einen Vertretervektor dieser Gestalt, so besitzt das Bildelement $\overline{V}$ von V als Vertreter den Vektor $\mathfrak{x}_{k-1}$, ist also E. Es gilt also in der Bezeichnungsweise von [1], § 2:

$$\mathfrak{N}_n^k \subset \mathfrak{U}_n^k \qquad \mathfrak{N}_n^k \subset {}_{k-1}\mathfrak{G}_n^k$$

Gilt umgekehrt $V \in \mathfrak{U}_n^k$ und $V \in {}_{k-1}\mathfrak{G}_n^k$, so gilt auch $V \in \mathfrak{N}_n^k$, so daß also (9) richtig ist.

Die Gruppe $\mathfrak{U}_n^k$ ist bei Erfülltsein von V 4 jedenfalls Erweiterung von $\mathfrak{N}_n^k$ durch $\mathfrak{V}_n^{k-1}$; ist auch V 5 erfüllt, so ist sie sogar eine Erweiterung von $\mathfrak{N}_n^k$ durch $\mathfrak{U}_n^{k-1}$. Darüber hinaus gilt

Satz 13: Gilt V 4 und V 5, so ist $\mathfrak{U}_n^k$ eine zerfallende Erweiterung von $\mathfrak{N}_n^k$ durch $\mathfrak{U}_n^{k-1}$.

Beweis: Wir haben zu zeigen, daß $\mathfrak{U}_n^k$ eine Untergruppe als Vertretersystem nach $\mathfrak{N}_n^k$ enthält. Nun besteht aber jede Nebenklasse von $\mathfrak{U}_n^k$ nach $\mathfrak{N}_n^k$ aus allen Elementen von $\mathfrak{U}_n^k$, die auf ein bestimmtes Element $H \in \mathfrak{U}_n^{k-1}$ abgebildet werden. Ist $\bar{\mathfrak{h}}(\mathfrak{x})$ Normalvertreter dieses Elementes, so gilt

$$\bar{\mathfrak{h}}(\mathfrak{x}) \in \mathfrak{M}(n, k-1)$$

daher gehört der Vektor $(\bar{\mathfrak{h}}(\mathfrak{x}), x_k)$ zu $\mathfrak{M}(n, k)$ und ist also Normalvertreter eines Elementes $K \in \mathfrak{U}_n^k$; dieses K wird tatsächlich auf H abgebildet. Wir bilden nun die Gesamtheit der Vektoren

$$(\bar{\mathfrak{h}}(\mathfrak{x}), x_k) \tag{10}$$

wobei $\bar{\mathfrak{h}}(\mathfrak{x})$ ein Normalvertretersystem von $\mathfrak{U}_n^{k-1}$ durchläuft; die dadurch vertretenen Elemente von $\mathfrak{U}_n^k$ bilden ein Vertretersystem für $\mathfrak{U}_n^k \mid \mathfrak{N}_n^k$.

Sind nun F, G zwei Elemente dieses Vertretersystemes, deren Vektoren der Form (10) gegeben seien durch

$$\mathfrak{f}(\mathfrak{x}) = (\bar{\mathfrak{f}}(\mathfrak{x}), x_k) \qquad \mathfrak{g}(\mathfrak{x}) = (\bar{\mathfrak{g}}(\mathfrak{x}), x_k)$$

so wird FG vertreten durch

$$\mathfrak{f}(\mathfrak{g}(\mathfrak{x})) = (\bar{\mathfrak{f}}(\bar{\mathfrak{g}}(\mathfrak{x})), x_k)$$

Nun vertritt aber $\bar{\mathfrak{f}}(\bar{\mathfrak{g}}(\mathfrak{x}))$ ein Element von $\mathfrak{U}_n^{k-1}$; dieses Element besitzt auch einen Vertreter $\bar{\mathfrak{f}}(\mathfrak{x})$ in dem Normalvertretersystem, das von $\bar{\mathfrak{h}}(\mathfrak{x})$ durchlaufen wird, also gilt

$$\bar{\mathfrak{f}}(\bar{\mathfrak{g}}(\mathfrak{x})) \equiv \bar{\mathfrak{f}}(\mathfrak{x}) \mod A_{k-1}^n$$

also auch

$$\mathfrak{f}(\mathfrak{g}(\mathfrak{x})) \equiv (\bar{\mathfrak{f}}(\mathfrak{x}), x_k) \mod A_k^n$$

es liegt also auch FG in unserem Vertretersystem, dieses bildet also tatsächlich eine Gruppe.

§ 5 Wir betrachten nun fünf spezielle, einfache Beispiele von $\mathfrak{M}$-Untergruppen und wollen darauf die bisher abgeleiteten allgemeinen Sätze anwenden. Wir werden dabei nicht jede der Untergruppen für sich untersuchen, sondern die einzelnen Schritte immer für alle Untergruppen zugleich vornehmen, außerdem werden wir uns manchmal ziemlich kurz fassen.

Wir setzen wie bisher

$$\mathfrak{x}_\nu = (x_1, x_2 \dots x_\nu) \text{ für } \nu \geqq 1;$$

ein Symbol $g(\mathfrak{x}_0)$ soll stets eine beliebige Konstante bedeuten, ebenso die Symbole a_ν und a. Für $\mathfrak{M}(n, k)$ nehmen wir der Reihe nach die Menge aller k-dimensionalen Polynomvektoren von folgender, durch Angabe ihrer ν-ten Komponente festgelegten Gestalt:

1. $\mathfrak{g}(\mathfrak{x}) = (g_\nu(\mathfrak{x}_\nu))$
2. $\mathfrak{g}(\mathfrak{x}) = (x_\nu\, g_\nu(\mathfrak{x}_{\nu-1}) + h_\nu(\mathfrak{x}_{\nu-1}))$
3. $\mathfrak{g}(\mathfrak{x}) = (x_\nu\, a_\nu + h_\nu(\mathfrak{x}_{\nu-1}))$
4. $\mathfrak{g}(\mathfrak{x}) = (x_\nu\, a + h_\nu(\mathfrak{x}_{\nu-1}))$
5. $\mathfrak{g}(\mathfrak{x}) = (x_\nu + h_\nu(\mathfrak{x}_{\nu-1}))$

Alle diese $\mathfrak{M}(n, k)$ sind also von n unabhängig; wir werden daher $\mathfrak{M}(k)$ dafür schreiben.

Man erkennt nun durch eine ganz einfache Rechnung in jedem der fünf Fälle: Ist $\mathfrak{f}(\mathfrak{x}) \in \mathfrak{M}(k)$ und $\mathfrak{g}(\mathfrak{x}) \in \mathfrak{M}(k)$, dann gilt auch $\mathfrak{f}(\mathfrak{g}(\mathfrak{x})) \in \in \mathfrak{M}(k)$. Nach Satz 1 ist daher die Voraussetzung V 1 in der erweiterten Form von § 4 erfüllt. Selbstverständlich gilt auch die Voraussetzung V 2 in allen Fällen.

Wie man sehr leicht einsieht, ist $\mathfrak{M}(k)$ in den Fällen 1, 2, 3, 4 ein Modul. Also ist die $\mathfrak{M}$-Untergruppe in diesen Fällen nach Satz 4 multiplikativ. Dies ist sie aber auch im Fall 5; das folgt aus Satz 3, denn es ist ja doch

$$u(x_\nu + f_\nu(\mathfrak{x}_{\nu-1})) + v(x_\nu + g_\nu(\mathfrak{x}_{\nu-1})) =$$
$$= ((u + v)\, x_\nu + u\, f_\nu(\mathfrak{x}_{\nu-1}) + v\, g_\nu(\mathfrak{x}_{\nu-1})) \equiv (x_\nu + h_\nu(\mathfrak{x}_{\nu-1})) \bmod A_k^n$$

nach Definition der Zahlen u und v in [1], § 4.

Wir werden nun zeigen, daß die $\mathfrak{M}$-Untergruppe in allen fünf Fällen auch teilertreu ist. Dazu werden wir folgenden Weg einschlagen: Nach Satz 9 ist die Voraussetzung V 3 erfüllt in den Fällen 1, 2, 3, 4 und wie man direkt sofort erkennt, auch im Fall 5. Daher kann man in jedem Fall Satz 8 anwenden; es wird sich dabei zeigen, daß jedes Element aus $\mathfrak{U}_{p^{e-1}}^k$ Bild mindestens eines Elementes aus $\mathfrak{U}_{p^e}^k$ ist, so daß also stets

eine homomorphe Abbildung von $\mathfrak{U}^k_{p^e}$ auf $\mathfrak{U}^k_{p^{e-1}}$ möglich ist. Aus Satz 7 folgt dann sofort, daß die $\mathfrak{M}$-Untergruppe in jedem der fünf Fälle teilertreu ist. Wir erhalten durch dieses Verfahren aber gleichzeitig auch Rekursionsformeln für die Ordnungen der $\mathfrak{U}^k_{p^e}$, die wir aber nicht explizit anschreiben werden. Wir wenden also nun die Methode von § 3 auf die fünf Fälle der Reihe nach an:

1. Es gilt $\mathfrak{D}(p^e, p^{e-1}) = \mathfrak{M}(k)$ nach einem allgemeinen Satz von § 3. Weiter haben wir:

Satz 14: Man erhält ein genaues Normalvertretersystem für $\mathfrak{L}$, wenn man in dem Vektor

$$\mathfrak{d}(\mathfrak{x}) = (f_\nu(\mathfrak{x}_\nu)) \tag{11}$$

jede der Komponenten $f_\nu(\mathfrak{x}_\nu)$ ein genaues Vertretersystem für das Ideal $\mathfrak{A}^{p^e}$ von [1], § 9 *in den Unbestimmten $\mathfrak{x}_\nu$ durchlaufen läßt.*

Beweis: Nach Definition von $\mathfrak{L}$ besitzt jedes Element $F \in \mathfrak{L}$ einen Vertretervektor

$$\mathfrak{t}(\mathfrak{x}) = (a_\nu(\mathfrak{x}_\nu))$$

in dem alle $a_\nu(\mathfrak{x}_\nu)$ Elemente von $\mathfrak{A}^{p^e}$ in den Unbestimmten $\mathfrak{x}_\nu$ vertreten. Ersetze ich hier die Komponenten $a_\nu(\mathfrak{x}_\nu)$ durch dazu nach A^{p^e} kongruente Polynome, so erhalte ich wieder einen Vertreter für F; daher besitzt F auch einen Vertreter in (11). Umgekehrt ist jeder Polynomvektor von (11) Vertreter eines Elementes von $\mathfrak{H}$ und eines Elementes von ${}_0\mathfrak{A}^{p^e}_k$, also Vertreter eines Elementes von $\mathfrak{L}$, und zwar Normalvertreter. Daß je zwei Vektoren (11) verschiedene Elemente von $\mathfrak{L}$ vertreten, ist klar.

Im Falle $e = 2$ folgt aus dem soeben bewiesenen Satz 14 durch Anwendung von [1], Hilfssatz 10 sogleich

Satz 14a: Man erhält ein genaues Normalvertretersystem für $\mathfrak{L}$ bei $e = 2$, wenn man in dem Ausdruck

$$\mathfrak{d}(\mathfrak{x}) = \mathfrak{S}(\mathfrak{x})\ \mathfrak{o}(\mathfrak{x}) + p\ \mathfrak{t}(\mathfrak{x}) \tag{12}$$

das $\mathfrak{S}(\mathfrak{x})$ alle Matrizen aus Polynomen der Normalform mod p von folgender Gestalt

$$\mathfrak{S}(\mathfrak{x}) = \begin{pmatrix} s_{11}(\mathfrak{x}_1) & 0 & \dots & 0 \\ s_{21}(\mathfrak{x}_2) & s_{22}(\mathfrak{x}_2) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{k1}(\mathfrak{x}_k) & s_{k2}(\mathfrak{x}_k) & \dots & s_{kk}(\mathfrak{x}_k) \end{pmatrix} \tag{13}$$

und das $\mathfrak{t}(\mathfrak{x})$ *alle Vektoren aus Polynomen der Normalform mod* p *von folgender Gestalt durchlaufen läßt*:

$$\mathfrak{t}(\mathfrak{x}) = (t_1(\mathfrak{x}_1), t_2(\mathfrak{x}_2) \ldots t_k(\mathfrak{x}_k)) \tag{14}$$

Nach unserer allgemeinen Methode müssen wir nun von den Vektoren (12) noch alle die heraussuchen, welche zu einem gegebenen Normalvertreter $\mathfrak{f}(\mathfrak{x})$ für ein Element F von $\mathfrak{U}_p^k$ die Bedingung (6) erfüllen. Dies leistet uns folgender

Satz 15: *Ein Polynomvektor* $\mathfrak{d}(\mathfrak{x})$ *von Satz 14a erfüllt gerade dann die Bedingung* (6), *wenn für alle seine* $s_{ii}(\mathfrak{x}_i)$ *gilt*:

$$\frac{\partial f_i(\mathfrak{x}_i)}{\partial x_i} - s_{ii}(\mathfrak{x}_i) \not\equiv 0 \bmod p \tag{15}$$

für jedes ganze $\mathfrak{x}_i$.

Beweis: Sei $\mathfrak{f}(\mathfrak{x}) = (f_\nu(\mathfrak{x}_\nu))$, dann haben wir $\mathfrak{f}(\mathfrak{x}) + \mathfrak{d}(\mathfrak{x}) = (g_\nu(\mathfrak{x}_\nu))$, wobei für die Komponenten dieses Vektors gilt

$$g_\nu(\mathfrak{x}_\nu) = f_\nu(\mathfrak{x}_\nu) + \sum_{i=1}^{\nu} s_{\nu i}(\mathfrak{x}_\nu)\,(x_i^p - x_i) + p\, t_\nu(\mathfrak{x}_\nu)$$

also haben wir für $\mu \leqq \nu$:

$$\frac{\partial g_\nu(\mathfrak{x}_\nu)}{\partial x_\mu} = \frac{\partial f_\nu(\mathfrak{x}_\nu)}{\partial x_\mu} + \sum_{i=1}^{\nu} \frac{\partial s_{\nu i}(\mathfrak{x}_\nu)}{\partial x_\mu}\,(x_i^p - x_i) + s_{\nu\mu}(\mathfrak{x}_\nu)\,(p\, x_\mu^{p-1} - 1) + p\,\frac{\partial t_\nu(\mathfrak{x}_\nu)}{\partial x_\mu}$$

und für $\mu > \nu$:

$$\frac{\partial g_\nu(\mathfrak{x}_\nu)}{\partial x_\mu} = 0$$

Daraus ergibt sich unschwer:

$$D(\mathfrak{f}(\mathfrak{x}) + \mathfrak{d}(\mathfrak{x})) \equiv \prod_{i=1}^{k} \left(\frac{\partial f_i(\mathfrak{x}_i)}{\partial x_i} - s_{ii}(\mathfrak{x}_i)\right) \bmod p$$

womit der Satz bewiesen ist.

Um nun festzustellen, wie viele Elemente von $\mathfrak{U}_{p^e}^k$ auf das gegebene Element F von $\mathfrak{U}_{p^{e-1}}^k$ abgebildet werden, brauche ich im Falle $e > 2$ bloß die Anzahl der Vektoren (11) abzuzählen, während ich für $e = 2$ die Anzahl der Vektoren (12) zu zählen habe, welche (15) erfüllen. Im ersten Fall erhalte ich bei Verwendung der Bezeichnungsweise von [1], § 12 für die gesuchte Anzahl Z_1 den Ausdruck

$$Z_1 = \prod_{\nu=1}^{k} U_e^\nu(\infty) = p^{W_1} \qquad W_1 = \sum_{\nu=1}^{k} \eta_e^\nu(\infty)$$

Im zweiten Fall ergibt sich die gesuchte Anzahl T_1 folgendermaßen: Ich habe in (13) und (14) an Möglichkeiten der Wahl

für die $s_{ij}(\mathfrak{x}_i)$ mit $j < i$ je p^{p^i}

für die $s_{ii}(\mathfrak{x}_i)$ mit Rücksicht auf (15) je $(p-1)^{p^i}$

(man beachte nämlich, daß nach [1], Hilfssatz 8 die Polynome der Normalform mod p in i Unbestimmten umkehrbar eindeutig den eindeutigen Abbildungen des i-dimensionalen Vektorraumes über dem Primkörper Π mod p auf Π entsprechen)

für die $t_i(\mathfrak{x}_i)$ je p^{p^i}

Also gilt

$$T_1 = \prod_{i=1}^{k} p^{ip^i} (p-1)^{p^i} = \prod_{i=1}^{k} [p^i(p-1)]^{p^i}$$

2. Auch hier gilt $\mathfrak{D}(p^e, p^{e-1}) = \mathfrak{M}(k)$ nach dem allgemeinen Satz von § 3. Wir haben hier:

Satz 16: *Man erhält ein genaues Normalvertretersystem für* $\mathfrak{L}$, *wenn man in dem Vektor*

$$\mathfrak{d}(\mathfrak{x}) = (x_\nu\, g_\nu(\mathfrak{x}_{\nu-1}) + h_\nu(\mathfrak{x}_{\nu-1})) \tag{16}$$

sowohl die $g_\nu(\mathfrak{x}_{\nu-1})$ *als auch die* $h_\nu(\mathfrak{x}_{\nu-1})$ *je ein genaues Vertretersystem für das Ideal* $\mathfrak{A}^{p^e}$ *in den Unbestimmten* $\mathfrak{x}_{\nu-1}$ *durchlaufen läßt.*

Beweis: Jedes Element $F \in \mathfrak{L}$ besitzt einen Vertretervektor $\mathfrak{f}(\mathfrak{x})$ von folgender Gestalt

$$\mathfrak{f}(\mathfrak{x}) = (x_\nu\, \bar{g}_\nu(\mathfrak{x}_{\nu-1}) + \bar{h}_\nu(\mathfrak{x}_{\nu-1}))$$

in dem jede Komponente Restpolynom mod p^{e-1} ist. Durch Einsetzen des Vektors $(\mathfrak{x}_{\nu-1}, 0)$ erkennt man, daß $\bar{h}_\nu(\mathfrak{x}_{\nu-1})$ und daher auch $\bar{g}_\nu(\mathfrak{x}_{\nu-1})$ Restpolynom mod p^{e-1} ist. Daraus ergibt sich sogleich, daß F einen Vertreter (16) besitzt. Man sieht leicht, daß umgekehrt jeder Vektor (16) Normalvertreter eines Elementes von $\mathfrak{L}$ ist. Daß je zwei Vektoren (16) verschiedene Elemente von $\mathfrak{L}$ vertreten, erkennt man, wenn man die Differenz zweier solcher Vektoren betrachtet und darin den Vektor $(\mathfrak{x}_{\nu-1}, 0)$ einsetzt.

Einen entsprechenden Satz für den Fall $e = 2$ erhält man wieder durch Anwendung von [1], Hilfssatz 10:

Satz 16a: *Man erhält ein genaues Normalvertretersystem für* $\mathfrak{L}$ *bei* $e = 2$, *wenn man in dem Vektor*

$$\mathfrak{d}(\mathfrak{x}) = \{[x_\nu\, \mathfrak{s}(\mathfrak{x}_{\nu-1}) + \bar{\mathfrak{s}}(\mathfrak{x}_{\nu-1})]\, \mathfrak{o}(\mathfrak{x}_{\nu-1}) + p[x_\nu\, t(\mathfrak{x}_{\nu-1}) + \bar{t}(\mathfrak{x}_{\nu-1})]\} \tag{17}$$

das $\mathfrak{s}(\mathfrak{x}_{\nu-1})$ *und* $\bar{\mathfrak{s}}(\mathfrak{x}_{\nu-1})$ *je alle* (ν—1)*-dimensionalen Polynomvektoren aus Polynomen der Normalform mod* p *in* ν—1 *Unbestimmten und das* $t(\mathfrak{x}_{\nu-1})$ *und* $\bar{t}(\mathfrak{x}_{\nu-1})$ *je alle Polynome der Normalform mod* p *in* ν—1 *Unbestimmten durchlaufen läßt.*

Wir haben nun wieder zu ermitteln, welche von den Vektoren (17) zu einem gegebenen Normalvertreter $\mathfrak{f}(\mathfrak{x})$ für ein Element von $\mathfrak{U}_p^k$ die Bedingung (6) erfüllen. Dazu benötigen wir zunächst einen Satz über $\mathfrak{f}(\mathfrak{x})$, nämlich:

Satz 17: Der Polynomvektor

$$\mathfrak{f}(\mathfrak{x}) = (x_\nu\, g_\nu(\mathfrak{x}_{\nu-1}) + h_\nu(\mathfrak{x}_{\nu-1})) \tag{18}$$

erzeugt nur dann ein volles Vektorsystem mod p*, wenn für jedes* ν *gilt:* $g_\nu(\mathfrak{x}_{\nu-1}) \not\equiv 0 \mod p$ *für alle ganzzahligen* $\mathfrak{x}_{\nu-1}$.

Beweis: Wäre für irgendein ν und einen ganzen Vektor $\mathfrak{x}_{\nu-1}$

$$g_\nu(\mathfrak{x}_{\nu-1}) \equiv 0 \mod p$$

dann würde der Polynomvektor $\mathfrak{f}(\mathfrak{x})$ für alle $p^{k-\nu+1}$ Vektoren mod p von der Gestalt $(\mathfrak{x}_{\nu-1}, \mathfrak{t})$ — wobei also $\mathfrak{t}$ ein k—ν+1 dimensionaler, ganzzahliger Vektor ist — einen Vektor der Gestalt $(\mathfrak{y}, \mathfrak{u})$ ergeben, wo $\mathfrak{y}$ ein fester ν-dimensionaler Vektor ist und $\mathfrak{u}$ ein k—ν-dimensionaler Vektor. Es wären also die Werte von $\mathfrak{f}(\mathfrak{x})$ für $p^{k-\nu+1}$ Vektoren mod p unter $p^{k-\nu}$ Vektoren mod p zu suchen, daher müßten mindestens zwei dieser Vektoren denselben Wert mod p ergeben und $\mathfrak{f}(\mathfrak{x})$ würde kein volles Vektorsystem mod p erzeugen.

Mit Hilfe von Satz 17 erhalten wir

Satz 18: Die Bedingung (6) *wird stets von allen Polynomvektoren* $\mathfrak{d}(\mathfrak{x})$ *aus* (17) *erfüllt.*

Man kann nämlich setzen $\mathfrak{f}(\mathfrak{x}) + \mathfrak{d}(\mathfrak{x}) = (h_\nu(\mathfrak{x}_\nu))$ und hat dann ersichtlich

$$D(\mathfrak{f}(\mathfrak{x}) + \mathfrak{d}(\mathfrak{x})) = \prod_{\nu=1}^{k} \frac{\partial\, h_\nu(\mathfrak{x}_\nu)}{\partial\, x_\nu}$$

Nun ergibt sich aber aus (17) und (18)

$$h_\nu(\mathfrak{x}_\nu) = x_\nu\, g_\nu(\mathfrak{x}_{\nu-1}) + h_\nu(\mathfrak{x}_{\nu-1}) + \sum_{i=1}^{\nu-1} (x_\nu\, s_{\nu i}(\mathfrak{x}_{\nu-1}) + \bar{s}_{\nu i}(\mathfrak{x}_{\nu-1}))\,(x_i^p - x_i) +$$
$$+ p(x_\nu\, t(\mathfrak{x}_{\nu-1}) + \bar{t}(\mathfrak{x}_{\nu-1}))$$

also

$$\frac{\partial\, h_\nu(\mathfrak{x}_\nu)}{\partial\, x_\nu} \equiv g_\nu(\mathfrak{x}_{\nu-1}) \mod p$$

woraus Satz 18 folgt.

Um wieder zu ermitteln, wieviele Elemente von $\mathfrak{U}_{p^e}^k$ auf das gegebene Element F von $\mathfrak{U}_{p^{e-1}}^k$ abgebildet werden, brauche ich also hier bloß die Vektoren (16) bzw. (17) zu zählen. Für die dabei auftretenden Zahlen, für die wir analoge Bezeichnungen wie beim Fall 1 wählen, ergibt sich:

$$Z_2 = (\prod_{\nu=1}^{k} U_e^{\nu-1}(\infty))^2 = p^{2W_2} \qquad W_2 = \sum_{\nu=0}^{k-1} \eta_e^{\nu}(\infty)$$

(dabei ist $\eta_e^0(\infty) = 1$ zu setzen).

$$T_2 = \prod_{\nu=1}^{k} (p^{p^{\nu-1}})^{2(\nu-1)}\, p^{2p^{\nu-1}} = (\prod_{\nu=1}^{k} p^{\nu p^{\nu-1}})^2 = p^{2V_2}$$

$$V_2 = \sum_{\nu=1}^{k} \nu\, p^{\nu-1}$$

3. Auch in diesem Fall haben wir $\mathfrak{D}(p^e, p^{e-1}) = \mathfrak{M}(k)$. Es gelten hier folgende Sätze:

Man erhält ein genaues Normalvertretersystem für $\mathfrak{L}$, wenn man in

$$\mathfrak{d}(\mathfrak{x}) = (p^{e-1} a_\nu x_\nu + h_\nu(\mathfrak{x}_{\nu-1}))$$

jedes der a_ν die Zahlen $0, 1 \ldots p-1$ und jedes der $h_\nu(\mathfrak{x}_{\nu-1})$ ein genaues Vertretersystem für das Ideal $\mathfrak{A}^{p^e}$ in den Unbestimmten $\mathfrak{x}_{\nu-1}$ durchlaufen läßt.

Man erhält im Falle $e = 2$ ein genaues Normalvertretersystem für $\mathfrak{L}$, wenn man in dem Vektor

$$\mathfrak{d}(\mathfrak{x}) = (p\, a_\nu x_\nu + \mathfrak{s}(\mathfrak{x}_{\nu-1})\, \mathfrak{o}(\mathfrak{x}_{\nu-1}) + p\, t(\mathfrak{x}_{\nu-1})) \tag{19}$$

jedes der a_ν die Zahlen $0, 1 \ldots p-1$, jedes der $\mathfrak{s}(\mathfrak{x}_{\nu-1})$ alle $(\nu-1)$-dimensionalen Polynomvektoren aus Polynomen der Normalform mod p und jedes der $t(\mathfrak{x}_{\nu-1})$ alle Polynome der Normalform mod p durchlaufen läßt.

Der Beweis geht genau so wie in den vorhergehenden Fällen. Weiter erkennt man durch Ausrechnen von $D(\mathfrak{f}(\mathfrak{x}) + \mathfrak{d}(\mathfrak{x}))$ zu gegebenem Normalvertreter $\mathfrak{f}(\mathfrak{x})$ für $\mathfrak{U}_p^k$ unter Beachtung von Satz 17 leicht, daß die Bedingung (6) für jeden Vektor (19) erfüllt ist.

Für die Zahlen Z, T erhält man daher ähnlich wie in den vorhergehenden Fällen:

$$Z_3 = p^k \prod_{\nu=1}^{k} U_e^{\nu-1}(\infty) = p^{W_3} \qquad W_3 = k + \sum_{\nu=0}^{k-1} \eta_e^{\nu}(\infty)$$

$$T_3 = p^k \prod_{\nu=1}^{k} p^{\nu p^{\nu-1}} = p^{V_3} \qquad V_3 = k + \sum_{\nu=1}^{k} \nu\, p^{\nu-1}$$

4. Wieder ist $\mathfrak{D}(p^e, p^{e-1}) = \mathfrak{M}(k)$. Wie in den vorhergehenden Fällen ergeben sich wieder folgende Sätze:

Man erhält ein genaues Normalvertretersystem für $\mathfrak{L}$, wenn man in

$$\mathfrak{d}(\mathfrak{x}) = (p^{e-1}\, a\, x_\nu + h_\nu(\mathfrak{x}_{\nu-1}))$$

das a die Zahlen $0, 1 \ldots p-1$ und jedes der $h_\nu(\mathfrak{x}_{\nu-1})$ ein genaues Vertretersystem für das Ideal $\mathfrak{A}^{p^e}$ in den Unbestimmten $\mathfrak{x}_{\nu-1}$ durchlaufen läßt.

Man erhält im Falle $e = 2$ ein genaues Normalvertretersystem für $\mathfrak{L}$, wenn man in dem Vektor

$$\mathfrak{d}(\mathfrak{x}) = (p\, a\, x_\nu + \mathfrak{s}(\mathfrak{x}_{\nu-1})\, \mathfrak{o}(\mathfrak{x}_{\nu-1}) + p\, t(\mathfrak{x}_{\nu-1})) \tag{20}$$

das a die Zahlen $0, 1 \ldots p-1$, jedes der $\mathfrak{s}(\mathfrak{x}_{\nu-1})$ alle $(\nu-1)$-dimensionalen Polynomvektoren aus Polynomen der Normalform mod p und jedes der $t(\mathfrak{x}_{\nu-1})$ alle Polynome der Normalform mod p durchlaufen läßt, und zu gegebenem Normalvertreter $\mathfrak{f}(\mathfrak{x})$ für $\mathfrak{U}_p^k$ erfüllen alle Vektoren (20) die Bedingung (6).

Man erhält daher für die Zahlen Z und T:

$$Z_4 = p \prod_{\nu=1}^{k} U_e^{\nu-1}(\infty) = p^{W_4} \qquad W_4 = 1 + \sum_{\nu=0}^{k-1} \eta_e^\nu(\infty)$$

$$T_4 = p \prod_{\nu=1}^{k} p^{\nu p^{\nu-1}} = p^{V_4} \qquad V_4 = 1 + \sum_{\nu=1}^{k} \nu\, p^{\nu-1}$$

5. In diesem Fall ist $\mathfrak{M}$ kein Modul. Die Ermittlung von $\mathfrak{D}(p^e, p^{e-1})$ macht aber auch hier keine Schwierigkeiten, man sieht nämlich gleich, daß dies die Menge aller Vektoren der Gestalt

$$\mathfrak{b}(\mathfrak{x}) = (l_\nu(\mathfrak{x}_{\nu-1}))$$

ist. Es gelten dann folgende Sätze:

Man erhält ein genaues Normalvertretersystem für $\mathfrak{L}$, wenn man in

$$\mathfrak{d}(\mathfrak{x}) = (h_\nu(\mathfrak{x}_{\nu-1}))$$

jedes der $h_\nu(\mathfrak{x}_{\nu-1})$ ein genaues Vertretersystem für das Ideal $\mathfrak{A}^{p^e}$ in den Unbestimmten $\mathfrak{x}_{\nu-1}$ durchlaufen läßt.

Man erhält ein genaues Normalvertretersystem für $\mathfrak{L}$ im Falle $e = 2$, wenn man in

$$\mathfrak{d}(\mathfrak{x}) = (\mathfrak{s}(\mathfrak{x}_{\nu-1})\, \mathfrak{o}(\mathfrak{x}_{\nu-1}) + p\, t(\mathfrak{x}_{\nu-1}))$$

jedes der $\mathfrak{s}(\mathfrak{x}_{\nu-1})$ alle $(\nu-1)$-dimensionalen Vektoren aus Polynomen der Normalform mod p und jedes der $t(\mathfrak{x}_{\nu-1})$ alle Polynome der Normal-

form mod p durchlaufen läßt, und zu gegebenem Normalvertreter $\mathfrak{f}(\mathfrak{x})$ für $\mathfrak{U}_p^k$ erfüllen alle diese Vektoren die Bedingung (6).

Wir erhalten daher

$$Z_5 = p^{W_5} \qquad W_5 = W_4 - 1$$

$$T_5 = p^{V_5} \qquad V_5 = V_4 - 1$$

§ 6. Nachdem wir gezeigt haben, daß jede der fünf betrachteten $\mathfrak{M}$-Untergruppen multiplikativ und teilertreu ist und Formeln gefunden haben, mit deren Hilfe die Ordnung von $\mathfrak{U}_{p^e}^k$ aus der von $\mathfrak{U}_{p^{e-1}}^k$ berechnet werden kann, wollen wir zum Abschluß noch die allgemeinen Überlegungen von § 4 auf diese fünf Gruppen anwenden; wir werden uns dabei jedoch hauptsächlich darauf beschränken, die Ordnungen der $\mathfrak{U}_p^k$ auszurechnen.

Wie wir bereits festgestellt haben, ist die Voraussetzung V 1 stets erfüllt. Man erkennt sofort, daß auch V 4 stets gilt, also kann man $\mathfrak{U}_n^k$ stets homomorph abbilden in $\mathfrak{U}_n^{k-1}$. Die Voraussetzung V 5 ist erfüllt in den Fällen 1, 2, 3 und 5, nicht jedoch im Fall 4. In den ersteren Fällen ist die Homomorphie von $\mathfrak{U}_n^k$ in $\mathfrak{U}_n^{k-1}$ also ein Homomorphismus und $\mathfrak{U}_n^k$ zerfallende Erweiterung von $\mathfrak{N}_n^k$ durch $\mathfrak{U}_n^{k-1}$ — $\mathfrak{N}_n^k$ ist dabei die Menge der Elemente von $\mathfrak{U}_n^k$, die einen Vertretervektor der Gestalt $(\mathfrak{x}_{k-1}, g(\mathfrak{x}))$ besitzen. Es gilt dann für die Ordnung $o(\mathfrak{U}_n^k)$ der Gruppe $\mathfrak{U}_n^k$:

$$o(\mathfrak{U}_n^k) = o(\mathfrak{U}_n^{k-1})\, o(\mathfrak{N}_n^k) \tag{21}$$

Um $o(\mathfrak{U}_p^k)$ zu erhalten, braucht man also bloß $o(\mathfrak{N}_p^k)$ und $o(\mathfrak{U}_p^1)$ zu kennen. Wir führen die Rechnung nun der Reihe nach für die einzelnen Fälle durch:

1. In diesem Falle gilt $\mathfrak{N}_p^k = {}_{k-1}\mathfrak{G}_p^k$. Denn jedes $G \in \mathfrak{N}_p^k$ ist ein Element von $\mathfrak{U}_p^k$ mit einem Vertretervektor $(\mathfrak{x}_{k-1}, g(\mathfrak{x}))$, gehört also zu ${}_{k-1}\mathfrak{G}_p^k$ und umgekehrt gehört jedes Element dieser Gruppe zu $\mathfrak{N}_p^k$. Nach [1], Satz V gilt also

$$o(\mathfrak{N}_p^k) = (p!)^{p^{k-1}}$$

Weiter gilt ersichtlich noch: $o(\mathfrak{U}_p^1) = p!$

Wir erhalten also:

$$o(\mathfrak{U}_p^k) = o(\mathfrak{U}_p^1) \prod_{\nu=2}^{k} o(\mathfrak{N}_p^\nu) = (p!)^{\sum_0^{k-1} p^\nu} = (p!)^{\varepsilon(p^k)}$$

denn bekanntlich gilt für den Exponenten $\varepsilon(p^k)$, zu dem p in der Primzahlzerlegung von $p^k!$ enthalten ist, die Beziehung

$$\varepsilon(p^k) = \frac{p^k - 1}{p - 1}$$

2. Wir zeigen zunächst: Man erhält in diesem Fall ein genaues Vertretersystem für $\mathfrak{N}_p^k$, wenn man in

$$\mathfrak{h}(\mathfrak{x}) = (\mathfrak{x}_{k-1}, x_k\, g(\mathfrak{x}_{k-1}) + h(\mathfrak{x}_{k-1})) \tag{22}$$

das $h(\mathfrak{x}_{k-1})$ alle Polynome der Normalform mod p und das $g(\mathfrak{x}_{k-1})$ alle die Polynome der Normalform mod p durchlaufen läßt, bei denen gilt:

$$g(\mathfrak{x}_{k-1}) \not\equiv 0 \mod p \text{ für jedes ganze } \mathfrak{x}_{k-1} \tag{23}$$

Liegt nämlich G in $\mathfrak{N}_p^k$, so besitzt es einen Vertretervektor der Gestalt $(\mathfrak{x}_{k-1}, g(\mathfrak{x}))$, aber auch einen Vertretervektor der Gestalt $(x_\nu, g_\nu(\mathfrak{x}_{\nu-1}) + + h_\nu(\mathfrak{x}_{\nu-1}))$, daher einen Vertretervektor

$$\bar{\mathfrak{h}}(\mathfrak{x}) = (\mathfrak{x}_{k-1}, x_k\, \bar{g}(\mathfrak{x}_{k-1}) + \bar{h}(\mathfrak{x}_{k-1}))$$

und man kann darin $\bar{g}(\mathfrak{x}_{k-1})$, $\bar{h}(\mathfrak{x}_{k-1})$ durch Polynome der Normalform mod p ersetzen, erhält also einen Vektor (22). Da dieser ein volles Vektorsystem mod p erzeugt, erzeugt seine letzte Komponente bei festem $\mathfrak{x}_{k-1}$ als Polynom in x_k ein volles Restsystem mod p, daher ist (23) erfüllt. Umgekehrt vertritt jeder Polynomvektor (22), bei dem (23) gilt, ein Element von $\mathfrak{U}_p^k$ — er erzeugt ja ein volles Vektorsystem mod p — und ein Element von ${}_{k-1}\mathfrak{G}_p^k$, also ein Element von $\mathfrak{U}_p^k \cap {}_{k-1}\mathfrak{G}_p^k = \mathfrak{N}_p^k$; verschiedene Vektoren (22) vertreten auch verschiedene Elemente von $\mathfrak{N}_p^k$.

Durch Abzählen der Vektoren (22) erhalten wir:

$$o(\mathfrak{N}_p^k) = p^{p^{k-1}}\,(p-1)^{p^{k-1}} = [(p-1)\,p]^{p^{k-1}}$$

Weiter gilt: $o(\mathfrak{U}_p^1) = p(p-1)$, so daß wir erhalten:

$$o(\mathfrak{U}_p^k) = [p(p-1)]^{\varepsilon(p^k)}$$

3. Man erhält in diesem Fall ein genaues Vertretersystem für $\mathfrak{N}_p^k$, wenn man alle Polynomvektoren von folgender Gestalt bildet:

$$\mathfrak{h}(\mathfrak{x}) = (\mathfrak{x}_{k-1}, a\, x_k + h(\mathfrak{x}_{k-1}))$$

wobei gilt $1 \leqq a \leqq p-1$ und $h(\mathfrak{x}_{k-1})$ ein Polynom der Normalform mod p ist.

Der Beweis geht genau so wie im Fall 2 und es ergibt sich dann:

$$o(\mathfrak{N}_p^k) = (p-1)\,p^{p^{k-1}}$$

Weiter gilt $o(\mathfrak{U}_p^1) = p(p-1)$, so daß wir erhalten:

$$o(\mathfrak{U}_p^k) = (p-1)^k \, p^{\varepsilon(p^k)}$$

5. Dieser Fall läßt sich genau so behandeln wie der Fall 3, und man erhält dabei $o(\mathfrak{N}_p^k) = p^{p^{k-1}}$ sowie $o(\mathfrak{U}_p^1) = p$, also:

$$o(\mathfrak{U}_p^k) = p^{\varepsilon(p^k)}$$

4. Dieser Fall nimmt, wie gesagt, eine Sonderstellung ein, da hier V 5 nicht erfüllt ist. Es läßt sich aber dennoch auch in diesem Fall sehr leicht beweisen, daß die Homomorphie von $\mathfrak{U}_n^k$ in $\mathfrak{U}_n^{k-1}$ ein Homomorphismus ist: Ist nämlich $F \in \mathfrak{U}_n^{k-1}$ und

$$\mathfrak{f}(\mathfrak{x}) = (a\, x_\nu + h_\nu(\mathfrak{x}_{\nu-1}))$$

ein Normalvertreter für F, so braucht man an $\mathfrak{f}(\mathfrak{x})$ als k-te Komponente bloß $a\, x_k$ anzuhängen und erhält so den Vertreter eines Elementes von $\mathfrak{U}_n^k$, das auf F abgebildet wird. Man kann auch hier wie beim Beweis von Satz 13 zeigen, daß $\mathfrak{U}_n^k$ zerfallende Erweiterung von $\mathfrak{N}_n^k$ durch $\mathfrak{U}_n^{k-1}$ ist.

Eine leichte Überlegung ergibt, daß $\mathfrak{N}_p^k$ hier identisch ist mit dem $\mathfrak{N}_p^k$ von Fall 5, jedoch gilt hier $o(\mathfrak{U}_p^1) = p(p-1)$; so erhalten wir

$$o(\mathfrak{U}_p^k) = (p-1)\, p^{\varepsilon(p^k)}$$

Ungleichungen über konvexe Polyeder

Von

A. Florian, Graz

Mit 2 Textabbildungen

(Eingelangt am 27. März 1956)

Zusammenfassung: Im ersten Abschnitt wird der Beweis für die Ungleichung[1]

$$V \leq \frac{2k}{3} \cos^2 \frac{\pi f}{2k} \operatorname{ctg} \frac{\pi e}{2k} \left(1 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi f}{2k} \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi e}{2k}\right) \tag{1}$$

(V = Volumen eines in der Einheitskugel enthaltenen konvexen Polyeders mit e Ecken, f Flächen und k Kanten) vereinfacht. Im Abschnitt 2 werden einige Folgerungen von (1) diskutiert. Der 3. und 4. Abschnitt bringen analoge Abschätzungen für die Kantenkrümmung eines der Einheitskugel ein- bzw. umbeschriebenen Polyeders. Obwohl sie nur in einem Sonderfall bewiesen werden, sind sie vermutlich allgemein gültig.

1. In einer früheren Arbeit[1] wurde für das Volumen V eines der Einheitskugel einbeschriebenen konvexen Polyeders mit e Ecken, f Flächen und k Kanten die Abschätzung (1) bewiesen. Dieser Beweis läßt sich an einer Stelle vereinfachen. Formel (I, 7) ist nämlich gleichwertig mit

$$\sum_{n=1}^{p} (1 - h_n^2) \sin \varphi_n \leq p \sin \frac{\varphi_1 + \cdots + \varphi_p}{p} \left\{1 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi_1 + \cdots + \varphi_p}{2p} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \operatorname{tg}^2 \left(\frac{1}{p} \sum_{n=1}^{p} \operatorname{arctg} \left(h_n \operatorname{tg} \frac{\varphi_n}{2}\right)\right)\right\}, \quad [0 < h_n < 1,\ 0 < \varphi_n < \pi]$$

und diese Ungleichung hat die Form

---

[1] *A. Florian*, Mh. f. Mathematik, Bd. 60, H. 2 (1956), im folgenden als I zitiert. Diese Abschätzung wurde von *L. Fejes Tóth*, Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1953, S. 128ff als Vermutung ausgesprochen.

$$\sum_{n=1}^{p} \gamma(h_n, \varphi_n) \leq p\,\gamma\left(\operatorname{ctg}\frac{\varphi_1 + \ldots + \varphi_p}{2p} \operatorname{tg}\left(\frac{1}{p}\sum_{n=1}^{p} \operatorname{arctg}(h_n \operatorname{tg}\frac{\varphi_n}{2})\right), \frac{\varphi_1 + \ldots + \varphi_p}{p}\right)$$

mit $\gamma(h, \varphi) = (1 - h^2)\sin\varphi$.
Setzt man

$$\frac{\pi - \varphi_n}{2} = u_n$$

$$\operatorname{arc\,tg}\,(h_n \operatorname{tg}\frac{\varphi_n}{2}) = v_n,$$

so bedeutet die letzte Ungleichung

$$\Sigma\,\gamma(\operatorname{tg} u_n \operatorname{tg} v_n,\ \pi - 2u_n) \leq$$

$$\leq p\,\gamma\left(\operatorname{tg}\frac{u_1 + \ldots + u_p}{p} \operatorname{tg}\frac{v_1 + \ldots + v_p}{p}, \pi - 2\frac{u_1 + \ldots + u_p}{p}\right),$$

also die Konkavität der Funktion

$$g(u, v) = \gamma(\operatorname{tg} u \operatorname{tg} v,\ \pi - 2u) \quad [0 < u,\ v < \frac{\pi}{2},\ u + v < \frac{\pi}{2}].$$

Für $\gamma(h, \varphi) = (1 - h^2)\sin\varphi$ wird aber

$$g(u, v) = \sin 2u\ (1 - \operatorname{tg}^2 u \operatorname{tg}^2 v);$$

diese Funktion wurde in I, Abschnitt 2 als konkav im Bereich

$$0 < u, v < \frac{\pi}{2};\ u + v < \frac{\pi}{2}$$

nachgewiesen. Damit ist (I, 7) gezeigt.

2. Aus (1) und der entsprechenden Formel für das Volumen eines die Einheitskugel enthaltenden konvexen Polyeders gegebener Ecken- und Flächenzahl (Fejes Tóth, l. c. S. 123) folgert man, wenn R und r Um- und Inkugelradius bezeichnen und $p = \frac{2k}{f}$ die mittlere Seitenzahl der Flächen und $q = \frac{2k}{e}$ die mittlere Kantenzahl der Ecken sind (Fejes Tóth, l. c. S. 130 und I),

$$\frac{R}{r} \geq \operatorname{tg}\frac{\pi}{p} \operatorname{tg}\frac{\pi}{q}. \tag{2}$$

Gleichheit besteht nur für die regulären Polyeder. (2) wurde von L. Fejes Tóth als Folge der von ihm vermuteten Ungleichung (1) angegeben. Nun sei

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{p}\operatorname{tg}\frac{\pi}{q} = \operatorname{ctg}\frac{\pi(n-2)}{2k}\operatorname{tg}\frac{\pi n}{2k} = f(n,k), \tag{3}$$

worin n die Ecken- oder die Flächenzahl bedeuten kann. Hält man n fest, so ist

$$f_k(n,k) = \frac{\pi}{4k^2}\,\frac{n(n-2)}{\sin^2\frac{\pi(n-2)}{2k}\cos^2\frac{\pi n}{2k}}\left(\frac{\sin\frac{\pi n}{k}}{n} - \frac{\sin\frac{\pi(n-2)}{k}}{n-2}\right) < 0,$$

da $\dfrac{\sin x}{x}$ in $(0,\pi)$ monoton abnimmt und $n \leq \dfrac{2k}{3}$ ist. Man schließt daher wegen $k \leq 3n-6$ auf

$$f(n,k) \geq f(n, 3n-6),$$

also

$$\frac{R}{r} \leq \sqrt{3}\ \operatorname{tg}\frac{\pi n}{6(n-2)}. \tag{4}$$

Bedeutet n die Anzahl der Ecken (Flächen), so gilt das Gleichheitszeichen genau für die regulären Dreieck-(Dreikant-)polyeder. Fejes Tóth erhält (4) auf etwas andere Weise (l. c. S. 131).

Hält man dagegen k fest, so sieht man leicht, daß $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{p}\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{q}$ für $e = f = \dfrac{k+2}{2}$ sein Minimum erreicht, also

$$\frac{R}{r} \geq \operatorname{tg}^2\frac{\pi(k+2)}{4k}. \tag{5}$$

Gleichheit besteht nur für das reguläre Tetraeder. (5) stellt eine Verschärfung der bei Fejes Tóth, l. c. S. 119 bewiesenen Formel für die Radien R', r' der Minimalkugelschale

$$\frac{R'}{r'} \geq \sqrt{3}\ \operatorname{tg}\frac{\pi k}{6(k-3)} \tag{6}$$

dar; denn es gilt (vgl. I)

$$\frac{R'}{r'} \geq \frac{R}{r} \geq \operatorname{tg}^2\frac{\pi(k+2)}{4k} \geq \sqrt{3}\ \operatorname{tg}\frac{\pi k}{6(k-3)}. \tag{7}$$

Die letzte Ungleichung ist nämlich gleichbedeutend mit

$$\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2k}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2(k-3)}\left(1-\operatorname{tg}\frac{\pi}{2k}+\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{2k}\right)\leq\sqrt{3}. \tag{8}$$

Die Funktion

$$f(k)=\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2k}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2(k-3)}$$

nimmt für $k>5$ monoton ab und daher ist $f(k)\leq f(8)=1,63<\sqrt{3}$ für $k\geq 8$. Da für $k\geq 3$ gilt $1-\operatorname{tg}\frac{\pi}{2k}+\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{2k}<1$, ist (8) für $k\geq 8$ (ohne Gleichheit) bewiesen. Die letzte Ungleichung (7) ist direkt prüfbar für $k=7$ und ergibt 2,53 bzw. 2,26. Für $k=6$ gilt ersichtlich Gleichheit.

3. In den folgenden zwei Abschnitten geben wir Abschätzungen für die Kantenkrümmung eines der Einheitskugel ein- bzw. umbeschriebenen konvexen Polyeders.

Wir untersuchen zunächst die Funktion

$$M(\tau,p)=p\sin\frac{\pi}{p}\sqrt{1-\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{p}\operatorname{tg}^2\frac{2\pi-\tau}{2p}}\ \arccos\left(\sin\frac{2\pi-\tau}{2p}\operatorname{cosec}\frac{\pi}{p}\right) \tag{9}$$

für $p\geq 3$, $0<\tau<2\pi$. Dazu setzen wir $p=\pi x$, $\tau=2\pi y$ und haben also

$$f(x,y)=x\sin\frac{1}{x}\sqrt{1-\operatorname{ctg}^2\frac{1}{x}\operatorname{tg}^2\frac{1-y}{x}}\ \arccos\left(\sin\frac{1-y}{x}\operatorname{cosec}\frac{1}{x}\right) \tag{10}$$

zu betrachten. Wie in I, Abschnitt 2, bewiesen wurde, sind allgemein $g(u,v)$ und

$$f(x,y)=(a_0x+b_0y+c_0)\,g\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_0x+b_0y+c_0},\frac{a_2x+b_2y+c_2}{a_0x+b_0y+c_0}\right)$$

— $a_0x+b_0y+c_0>0$ vorausgesetzt — gleichzeitig konkav (oder konvex). Die Kollineation

$$u=\frac{1}{x},\quad v=\frac{\pi}{2}-\frac{1-y}{x} \tag{11}$$

zeigt, daß in unserem Fall $f(x,y)$ in (10) konkav ist, wenn dies für

$$g(u, v) = \sin u \sqrt{1 - \operatorname{ctg}^2 u \operatorname{ctg}^2 v} \arccos(\cos v \operatorname{cosec} u) \tag{12}$$

zutrifft. Mit den Abkürzungen

$$z = \cos u \sqrt{\operatorname{tg}^2 u \operatorname{tg}^2 v - 1}, \quad w = \frac{\operatorname{arc\,tg} z}{z} \tag{13}$$

ergibt die Rechnung

$$g_{uu} g_{vv} - g_{uv}^2 = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 u \sin^2 v \operatorname{tg}^2 v} [w^2(z^2+1)(z^2-1) + 2w - 1], \tag{14}$$

$$g_{uu} = -\frac{1}{z^2 \operatorname{tg}^2 u \operatorname{tg} v} \{z^2 \operatorname{tg}^2 u [w(z^2+1)+1] + (z^2+1) w - 1\}. \tag{14'}$$

Nun gilt für $z > 0$

$$f(z) \equiv \operatorname{arc\,tg} z - \frac{z}{z^2+1} > 0; \tag{15}$$

denn es ist $f(0) = 0$ und $f'(z) = \dfrac{2z^2}{(z^2+1)^2} > 0$.

Ähnlich ist für $0 < z < 1$

$$g(z) \equiv \operatorname{arc\,tg} z - \frac{z}{1-z^2} < 0, \tag{15'}$$

da $g(0) = 0$ und $g'(z) = -\dfrac{4z^2}{(1-z^2)^2(1+z^2)} < 0$ ist.

Aus (13) bis (15′) folgt, daß

$$g_{uu} g_{vv} - g_{uv}^2 > 0, \quad g_{uu} < 0$$

ist für $0 < u, v < \dfrac{\pi}{2}$, $u + v > \dfrac{\pi}{2}$. Somit ist $g(u, v)$ in diesem Bereich konkav und daher auch $M(\tau, p)$ in jedem Rechteck $2 < p_1 \leq p \leq p_2$, $0 \leq \tau \leq 2\pi$.

Ein konvexes Polyeder mit e Ecken, f Flächen und k Kanten liege in der Einheitskugel (EK). Dann gilt für seine Kantenkrümmung

$$M = \tfrac{1}{2} \sum_i s_i \alpha_i$$

(s_i = Kantenlänge, α_i = Winkel der äußeren Normalen der bei s_i anstoßenden Seitenflächen des Polyeders, Σ = Summe über alle Kanten) vermutlich die Abschätzung

$$M \leq 2k \sin\frac{\pi f}{2k} \sqrt{1 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi f}{2k} \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi e}{2k}} \arccos\left(\cos\frac{\pi e}{2k} \operatorname{cosec} \frac{\pi f}{2k}\right) \tag{16}$$

Es ist klar, daß man (16) nur für Polyeder zu beweisen braucht, die den Mittelpunkt der *EK* im Inneren enthalten (vgl. I, Abschnitt 1). Wir zeigen nun (16) in folgendem Spezialfall: Die Fußpunkte der Normalen vom Kugelmittelpunkt auf die Randflächen des Polyeders liegen im Inneren der Randflächen und die Fußpunkte der Normalen vom Mittelpunkt auf die Kanten des Polyeders liegen auf den Kanten selbst.

Es sei t ein in der *EK* liegendes p-Eck mit den genannten Eigenschaften. Die Seitenlängen von t seien s_i $(i = 1, \ldots, p)$, v die konvexe Hülle von t und dem Kugelmittelpunkt, $\frac{\pi}{2} - \alpha_i$ die inneren Winkel, die t mit den Seitenflächen von v bildet und τ der Inhalt der Projektion von t aus dem Kugelmittelpunkt auf die Kugelfläche, h sei der Abstand des Kugelmittelpunktes von t. Dann gilt

$$m \equiv \tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{p} s_i \alpha_i \leq M(\tau, p) \tag{17}$$

und Gleichheit besteht nur für das der *EK* einbeschriebene reguläre p-Eck der Projektion τ. Da $M(\tau, p)$ die dem letzterem entsprechende Größe m ist, drückt (17) eine Extremaleigenschaft des regulären p-Ecks unter allen p-Ecken der genannten Art aus. (17) ist jedoch nicht für beliebige p-Ecke richtig; vielmehr gibt es unter den Polygonen, bei denen der Fußpunkt der vom Kugelmittelpunkt auf sie gefällten Normalen außerhalb des Polygons liegt, zu jedem p für alle hinreichend kleinen τ p-Ecke, die (17) nicht erfüllen. Die Schwierigkeit beim allgemeinen Beweis von (16) ist somit ganz dieselbe wie beim Oberflächenproblem (Fejes Tóth, l. c. S. 155).

Beweis von (17): Es ist (Abb. 1)

$$m = \tfrac{1}{2} \sum_{n=1}^{2p} r_n \sin \varphi_n \operatorname{arc\,tg} \frac{r_n \cos \varphi_n}{h} \tag{18}$$

$$2\pi - \tau = \sum_{n=1}^{2p} \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{h}{\sqrt{h^2 + r_n^2}} \operatorname{tg} \varphi_n \right) \tag{18'}$$

$$\sum_{n=1}^{2p} \varphi_n = 2\pi. \tag{18''}$$

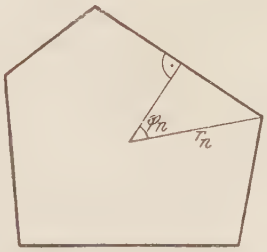

Abb. 1

Wie man aus (9), (18) und (18′) erkennt, ist (17) ein Sonderfall der allgemeineren Ungleichung

$$\sum_{n=1}^{2p} r_n \sin\varphi_n \operatorname{arc\,tg}\frac{r_n\cos\varphi_n}{h} \leq 2p\,\sin\frac{\varphi_1+\ldots+\varphi_{2p}}{2p}\cdot$$

$$\cdot\left\{1-\operatorname{ctg}^2\frac{\varphi_1+\ldots+\varphi_{2p}}{2p}\operatorname{tg}^2\left(\frac{1}{2p}\sum_{n=1}^{2p}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{h}{\sqrt{h^2+r_n^2}}\operatorname{tg}\varphi_n\right)\right)\right\}^{1/2}$$

$$\cdot\operatorname{arc\,cos}\left[\sin\left(\frac{1}{2p}\sum_{n=1}^{2p}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{h}{\sqrt{h^2+r_n^2}}\operatorname{tg}\varphi_n\right)\right)\operatorname{cosec}\frac{\varphi_1+\ldots+\varphi_{2p}}{2p}\right] \tag{19}$$

mit $0<\varphi_n<\frac{\pi}{2}$, $\sqrt{r_n^2+h^2}\leq 1$; (17) folgt aus (19), wenn man (18″) hinzunimmt.

Wir setzen nun in (19)

$$\varphi_n = u_n$$

$$\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{h}{\sqrt{h^2+r_n^2}}\operatorname{tg}\varphi_n\right)=\frac{\pi}{2}-v_n;$$

das ergibt

$$h\sum_{n=1}^{2p}\sin u_n\sqrt{\operatorname{tg}^2 u_n\operatorname{tg}^2 v_n-1}\operatorname{arc\,cos}(\cos v_n\operatorname{cosec} u_n)\leq$$

$$\leq 2p\,\sin\frac{u_1+\ldots+u_{2p}}{2p}\left\{1-\operatorname{ctg}^2\frac{u_1+\ldots+u_{2p}}{2p}\operatorname{ctg}^2\frac{v_1+\ldots+v_{2p}}{2p}\right\}^{1/2}\cdot$$

$$\cdot\operatorname{arc\,cos}\left(\cos\frac{v_1+\ldots+v_{2p}}{2p}\operatorname{cosec}\frac{u_1+\ldots+u_{2p}}{2p}\right) \tag{20}$$

für $0<u_n, v_n<\frac{\pi}{2}$; $u_n+v_n<\frac{\pi}{2}$; $h\leq\operatorname{ctg}u_n\operatorname{ctg}v_n$. Wegen dieser letzten Ungleichung ist aber (20) eine Folge der Konkavität der Funktion $g(u,v)$ in (11). Gleichheit besteht nur für $u_1=\ldots=u_{2p}$, $v_1=\ldots=v_{2p}$, $h=\operatorname{ctg}u_n\operatorname{ctg}v_n$, in (19) und (17) daher nur für $\varphi_1=\ldots=\varphi_{2p}$, $r_1=\ldots=r_{2p}$, $r_n^2+h^2=1$, d. h. für ein der Kugel einbeschriebenes reguläres p-Eck der Projektion τ.

Für die Kantenkrümmung M des Polyeders findet man nun, indem man (17) und die Konkavität von $M(\tau,p)$ berücksichtigt, wobei die folgende Summe über alle Randflächen zu erstrecken ist,

$$M=\Sigma m\leq\Sigma M(\tau,p)\leq f\,M\left(\frac{4\pi}{f},\frac{2k}{f}\right),$$

also die zu beweisende Ungleichung (16).

4. Beim analogen Problem der Kantenkrümmung eines der EK umbeschriebenen Polyeders tritt die Funktion

$$\overline{M}(\tau, p) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{p} \operatorname{ctg} \frac{2\pi - \tau}{2p} M(\tau, p) \tag{21}$$

auf. Die Substitution $p = \pi x$, $\tau = 2\pi y$ und hierauf die Kollineation (11) führen auf

$$\bar{g}(u, v) = \sin u \sqrt{\operatorname{tg}^2 u \operatorname{tg}^2 v - 1} \arccos(\cos v \operatorname{cosec} u) \tag{22}$$

Mit den Abkürzungen (13) findet man

$$\bar{g}_{uu}\bar{g}_{vv} - \bar{g}_{uv}^2 = \frac{\operatorname{tg}^2 u}{\cos^2 v}\left\{z^2 \operatorname{tg}^2 u\left[(3z^2-1)w^2 + 2w - \frac{1}{z^2+1}\right] + \right.$$
$$\left. + \left[(2z^4 + z^2 - 1)w^2 + 2w - \frac{2z^2+1}{z^2+1}\right]\right\}, \tag{23}$$

$$\bar{g}_{vv} = \frac{\sin u \cos u}{z^2 \cos^2 v}\{2z^2 \operatorname{tg}^2 u(wz^2+1) + [w(2z^4+z^2-1)+2z^2+1]\}. \tag{23'}$$

Die Ausdrücke in den eckigen Klammern sind positiv für alle $z > 0$. Wir zeigen dies etwa am 1. Ausdruck:

Ist $3z^2 - 1 = 0$, so wird er gleich $\frac{\pi}{\sqrt{3}} - \frac{3}{4} > 0$. Im anderen Fall läßt er sich in der Form schreiben

$$(3z^2 - 1)(w - w_1)(w - w_2) \qquad [w_1 > w_2]$$

und man bestätigt leicht, daß für

$$3z^2 - 1 > 0 \qquad w_1 < \frac{1}{z^2+1},$$

$$3z^2 - 1 < 0 \qquad w_2 < \frac{1}{z^2+1} < 1 < w_1$$

gilt. Daraus und aus (15) folgt die Behauptung. Ähnlich beweist man, daß auch die beiden anderen Klammern positiv sind, so daß

$$\bar{g}_{uu}\bar{g}_{vv} - \bar{g}_{uv}^2 > 0, \ \bar{g}_{vv} > 0 \tag{24}$$

für $0 < u, v < \frac{\pi}{2}$; $u + v > \frac{\pi}{2}$ ist. Daher ist $\bar{g}(u, v)$ konvex in diesem Bereich und somit auch $\overline{M}(\tau, p)$ in jedem Rechteck $0 \leq \tau \leq \tau_0 < 2\pi$, $2 < p_1 \leq p \leq p_2$.

Ein konvexes Polyeder mit e Ecken, f Flächen und k Kanten enthalte die EK. Dann gilt für seine Kantenkrümmung $\overline{M}$

$$\overline{M} \geq 2k \sin\frac{\pi f}{2k}\sqrt{\operatorname{tg}^2\frac{\pi f}{2k}\operatorname{tg}^2\frac{\pi e}{2k}-1}\ \arccos\left(\cos\frac{\pi e}{2k}\operatorname{cosec}\frac{\pi f}{2k}\right) \quad (25)$$

mit Gleichheit nur für die der EK umbeschriebenen regulären Polyeder.

Die Überlegungen laufen vollständig parallel zu denen des 2. Abschnittes. (25) wird unter denselben Voraussetzungen über die Randflächen und Kanten des Polyeders bewiesen wie (16). Es gilt mit denselben Bezeichnungen für ein außerhalb der Kugel liegendes p-Eck t

$$\overline{m} = \tfrac{1}{2}\sum_i s_i \alpha_i \geq \overline{M}(\tau, p). \quad (26)$$

Darin ist wieder die Extremaleigenschaft des regulären p-Ecks enthalten, jedoch nur unter den bereits genannten p-Ecken. Es gibt Polygone, bei denen der Fußpunkt der Normalen auf die Fläche außerhalb des Polygons liegt und für die $\overline{m} < 0$, somit (26) nicht erfüllt ist. Man braucht (26) offenbar nur für Polygone zu beweisen, die die EK berühren.

Nun ist (Abb. 2)

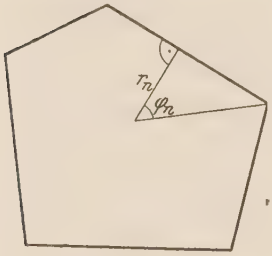

Abb. 2

$$\overline{m} = \tfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{2p} r_n \operatorname{arc\,tg} r_n \operatorname{tg}\varphi_n \quad (27)$$

$$2\pi - \tau = \sum_{n=1}^{2p} \operatorname{arc\,tg}\frac{\sin\varphi_n}{\sqrt{r_n^2+\cos^2\varphi_n}} \quad (27')$$

$$\sum_{n=1}^{2p}\varphi_n = 2\pi. \quad (27'')$$

(26) folgt, indem man (27″) berücksichtigt, aus der allgemeineren Ungleichung

$$\sum_{n=1}^{2p} r_n \operatorname{arc\,tg} r_n \operatorname{tg}\varphi_n \geq 2p \sin\frac{\varphi_1+\ldots+\varphi_{2p}}{2p} \cdot$$

$$\cdot\left\{\operatorname{tg}^2\frac{\varphi_1+\ldots+\varphi_{2p}}{2p}\operatorname{ctg}^2\left(\frac{1}{2p}\sum_{n=1}^{2p}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sin\varphi_n}{\sqrt{r_n^2+\cos^2\varphi_n}}\right)-1\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\cdot \arccos\left[\sin\left(\frac{1}{2p}\sum_{n=1}^{2p}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sin\varphi_n}{\sqrt{r_n^2+\cos^2\varphi_n}}\right)\operatorname{cosec}\frac{\varphi_1+\ldots+\varphi_{2p}}{2p}\right], \quad (28)$$

wobei $0 < \varphi_n < \frac{\pi}{2}$, $r_n > 0$ ist. Setzt man

$$\varphi_n = u_n$$

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{\sin \varphi_n}{\sqrt{r_n^2 + \cos^2 \varphi_n}} = \frac{\pi}{2} - v_n,$$

so geht (28) über in

$$\sum_{n=1}^{2p} \sin u_n \sqrt{\operatorname{tg}^2 u_n \operatorname{tg}^2 v_n - 1} \operatorname{arc\,cos} (\cos v_n \operatorname{cosec} u_n) \geq 2p \sin \frac{u_1 \ldots + u_{2p}}{2p} \cdot$$

$$\cdot \left\{ \operatorname{tg}^2 \frac{u_1 + \ldots + u_{2p}}{2p} \operatorname{tg}^2 \frac{v_1 + \ldots + v_{2p}}{2p} - 1 \right\}^{1/2}$$

$$\cdot \operatorname{arc\,cos} \left(\cos \frac{v_1 + \ldots + v_{2p}}{2p} \operatorname{cosec} \frac{u_1 + \ldots + u_{2p}}{2p} \right).$$

Diese Ungleichung drückt einfach die vorhin bewiesene Konvexität von $\bar{g}(u, v)$ für $0 < u, v < \frac{\pi}{2}$; $u + v > \frac{\pi}{2}$ aus. Damit ist (26) gezeigt; das Gleichheitszeichen ist nur für ein reguläres p-Eck richtig, das die Kugel in seinem Mittelpunkt berührt. (25) folgt nun aus (26) und der Konvexität von $\overline{M}(\tau, p)$:

$$\overline{M} = \Sigma \overline{m} \geq \Sigma \overline{M}(\tau, p) \geq f \overline{M} \left(\frac{4\pi}{f}, \frac{2k}{f} \right).$$

(16) und (25) sind, obwohl hier nur in einem Spezialfall bewiesen, wahrscheinlich allgemein richtig. Diese Vermutung wird durch folgende Tatsache gestützt: Sind R, r Um- und Inkugelradius eines konvexen Polyeders mit der Kantenkrümmung M, der durchschnittlichen Seitenzahl p der Flächen und der durchschnittlichen Kantenzahl q der Ecken, so hat man nach (16) und (25)

$$2k \sin \frac{\pi}{p} \sqrt{\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{p} \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{q} - 1} \operatorname{arc\,cos} \left(\cos \frac{\pi}{q} \operatorname{cosec} \frac{\pi}{p} \right) \cdot r \leq$$

$$\leq M \leq 2k \sin \frac{\pi}{p} \sqrt{1 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{p} \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{q}} \operatorname{arc\,cos} \left(\cos \frac{\pi}{q} \operatorname{cosec} \frac{\pi}{p} \right) \cdot R, \quad (29)$$

woraus wieder die Ungleichung (2)

$$\frac{R}{r} \geq \operatorname{tg} \frac{\pi}{p} \operatorname{tg} \frac{\pi}{q}$$

folgen würde, die, wie anfangs erwähnt, bereits allgemein bewiesen wurde.

Zur Integration der isotropen Komplexe in R_5

Von

M. Pinl, Köln

(Eingelangt am 28. März 1956)

Im Jahre 1926 wurde von *W. Blaschke* eine Neubearbeitung von *F. Klein*'s „Vorlesungen über höhere Geometrie" vorgelegt[1]. Darin wurde im Anhang das *Monge*sche Problem besprochen und dem Wunsche nach einer mehr geometrisch-anschaulichen Darstellung der Ergebnisse von *W. Groß*[2] zur Theorie der integrallos lösbaren Differentialgleichungen erster Ordnung Ausdruck gegeben. Im gleichen Jahre stellte *W. Wirtinger* die Frage nach der Möglichkeit einer integrallosen Darstellung der vollisotropen Torsen des euklidischen komplexen fünfdimensionalen Raumes R_5.[3] Die Untersuchungen von *W. Groß* werden — obwohl für beliebige endliche Dimensionszahlen formuliert — ausführlich in einem fünfdimensionalen Raum durchgeführt im Sinne einer Theorie der Einhüllenden vierdimensionaler Hyperflächen dieses Raumes. Die geringe geometrische Anschaulichkeit der Groß'schen Ergebnisse liegt darin begründet, daß es sich — angeregt durch *D. Hilbert*'s richtungsgebende Untersuchung zum Klassenbegriff von Differentialgleichungen —[4] um analytische Existenzaussagen handelt, während es geometrischen Anwendungen auf integrallose Darstellungen wichtiger geometrischer Gebilde (isotrope Kurven, Minimalflächen) durch Angabe expliziter Formel-

---

[1] *F. Klein*, Vorlesungen über höhere Geometrie, § 95, S. 379, J. Springer, Berlin 1926.

[2] *W. Groß*, Über Differentialgleichungssysteme erster Ordnung, deren Lösungen sich integrallos darstellen lassen. Math. Annalen **73** (1913), 109—172; Zur Theorie der integrallos lösbaren Differentialgleichungen erster Ordnung, **76** (1915), 244—283.

[3] *J. Lense*, Über ametrische Mannigfaltigkeiten und quadratische Differentialformen mit verschwindender Diskriminante, Jahresber. Dtsch. Math. Ver. **35** (1926), 280—294; M. Pinl, Diss. Wien 1926.

[4] *D. Hilbert*, Über den Begriff der Klasse von Differentialgleichungen, Math. Annalen **73**, (1913), 95—108.

gruppen ankommt, aus welchen jede Quadratur verbannt bleibt und in die die Höchstzahl der willkürlichen Funktionen eingeht, welche dem unterbestimmten Charakter des jeweiligen *Monge*schen Problems entspricht. Dabei kann sehr wohl der Fall eintreten, daß die explizite Herstellung einer integrallosen Darstellung auch nach Überwindung aller analytischen Schwierigkeiten (Integration der dem *Monge*schen Problem zugeordneten partiellen Differentialgleichungen) algebraisch scheitert, insbesondere dann, wenn es nicht gelingt oder unmöglich ist, lineare Integralscharen der zugeordneten partiellen Differentialgleichungen anzugeben, da dann die integrallose Darstellung zumeist auf die Auflösung von Systemen höherer algebraischer oder transzendenter Gleichungen führt. Im euklidischen n-dimensionalen Raum lassen sich diese Schwierigkeiten vermeiden, wenn man von vornherein nur lineare Scharen verwenden kann. Dies zeigt das Musterbeispiel der integrallosen Darstellung der isotropen Kurven des R_3[5] als Ort ihrer Schmiegebenen. Doch führt auch diese „dualistische" Methode auf Schwierigkeiten, explizite Formeln anzugeben, wenn die Dimensionszahl des Raumes zunimmt[6].

Eine solche dualistische Darstellung einer Kurvenklasse des R_n ist vom Typus (l, p), wenn l die Dimension der verwendeten R_l-Schar ist und p die Ordnung der höchsten Ableitungen der Stellungsvektoren $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \ldots, \mathfrak{e}_{n-l}, \ldots, \mathfrak{e}_1^{(p)}, \ldots, \mathfrak{e}_{n-l_p}^{(p)}$ der linearen R_l und willkürlichen Funktionen in der Darstellung ist. Eine solche Darstellung heißt überdies regulär, wenn die Matrix

$$|| \mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_{n-l}, \mathfrak{e}_1^{(p)}, \ldots, \mathfrak{e}_{n-l_p}^{(p)} ||$$

für einen gewissen Bereich des Kurvenparameters vom Rang n ist.[7] Für reguläre integrallose Darstellungen isotroper Kurven gilt

$$\frac{n}{2} \leqq l \leqq n-1, \quad 1 \leqq p \leqq n-1, \quad (n \geqq 3).$$

Bereits im euklidischen vierdimensionalen Raum hat sich der „mini-

---

[5] Vgl. z. B. *W. Blaschke*, Vorlesungen über Differentialgeometrie I, § 23, S. 45, Berlin, J. Springer 1930.

[6] Vgl. z. B. *M. Pinl*, Zur dualistischen Theorie isotroper und verwandter Kurven im euklidischen Raum von n Dimensionen, Mh. Math. u. Phys. **44** (1936), 1—12.

[7] *M. Pinl*, Binäre orthogonale Matrizen und integrallose Darstellungen isotroper Kurven, Math. Annalen **121** (1949), 1—20.

male" Darstellungstypus (2,1) dem „maximalen" (3,3) gegenüber als praktisch vorteilhafter erwiesen und zu einer einfachen integrallosen Darstellung der allgemeinen isotropen Kurven des R_4 geführt[8]. Im euklidischen R_5 führt der maximale Typus (4,4) auf die Auflösung des Systems

$$\mathfrak{e}\,\mathfrak{x}+\mathfrak{f}=0,\ \mathfrak{e}'\,\mathfrak{x}+\mathfrak{f}'=0,\ \mathfrak{e}''\,\mathfrak{x}+\mathfrak{f}''=0,\ \mathfrak{e}'''\,\mathfrak{x}+\mathfrak{f}'''=0,\ \mathfrak{e}''''\,\mathfrak{x}+\mathfrak{f}''''=0$$

mit den Nebenbedingungen

$$(\mathfrak{e}, \mathfrak{e}', \mathfrak{e}'', \mathfrak{e}''', \mathfrak{e}'''') \neq 0,\ [\mathfrak{e}, \mathfrak{e}', \mathfrak{e}'', \mathfrak{e}''']^2 = 0,$$

d. h. auf ein *Monge*sches Problem dritter Ordnung für den Stellungsvektor $\mathfrak{e}(t)$ der verwendeten R_4-Scharen und auf Quotienten von Determinanten fünfter Ordnung bei der Berechnung der Komponenten $x_1(t), \ldots, x_5(t)$ des Ortsvektors $\mathfrak{x}(t)$ der darzustellenden isotropen Kurven des R_5 — ein praktisch aussichtsloses Beginnen. Demgegenüber führt, wie wir im Folgenden zeigen, der Typus (2,1) auch im R_5 zum Ziel, wenn man nur für die Auswahl der in die Darstellung eingehenden willkürlichen Funktionen eine Nebenbedingung in Kauf nimmt (§ 2). Da die vollisotropen Torsen des R_5 Tangentenflächen zweifach isotroper Kurven sind, führt die erwähnte Frage nach ihrer integrallosen Darstellbarkeit nur scheinbar auf ein *Monge*sches Problem in zwei unabhängigen Veränderlichen[9]. Es genügt, eine integrallose Darstellung der allgemeinen zweifach isotropen Kurven des R_5 anzugeben, um diese Frage zu bejahen (§ 3). Dabei erfahren die in die Darstellung der einfach isotropen Kurven (§ 2) eingehenden willkürlichen Funktionen naturgemäß eine weitere Einschränkung in Form einer zweiten Nebenbedingung. Wir diskutieren diese Nebenbedingungen in § 4. Zum Schluß zeigen wir, daß die von *D. Hilbert* „diskriminierend" genannten Lösungen unserer *Monge*schen Probleme sämtlich durch isotrope Gerade gegeben sind. Das „Reservoir" aller dieser Darstellungen bilden im Falle des minimalen Darstellungstypus (2,1) — in R_4 wie in R_5 — die vollisotropen Ebenen. Wir besprechen daher zunächst diese (§ 1).

---

[8] *M. Pinl*, Zur dualistischen Theorie isotroper Kurven, Mh. Math. u. Phys. **49** (1940), 261—278.

[9] Vgl. z. B. *E. Goursat*, Sur une généralisation du problème de Monge, Annales Toulouse (3) **22** (1930), 249—295; Sur quelques équations de Monge, Annali di Pisa (2) **1** (1932), 35—59; *M. Pinl*, Zur integrallosen Darstellung n-dimensionaler isotroper Mannigfaltigkeiten im euklidischen R_{n+2}, Math. Zeitschrift **42**/3, 337—354.

§ 1. Der vollisotrope Ebenenhexakomplex in R_5

Wir betrachten die orthogonalen Matrizen

$$||a_1||, \left\|\begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{matrix}\right\|, \left\|\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{matrix}\right\|, \ldots, \sum_{k=1}^{n\geqq 1} a_k^2 = \sum_{k=1}^{n\geqq 2} b_k^2 = \sum_{k=1}^{n\geqq 3} c_k^2 = \ldots = 1, \sum_{k=1}^{n\geqq 2} a_k\, b_k = \sum_{k=1}^{n\geqq 3} a_k\, c_k = \ldots = 0$$

und die vollisotropen linearen Mannigfaltigkeiten

$$x_1 = x_1,\ i\,x_2 = a_1\,x_1 + C_1; \tag{1}$$

$$x_1 = x_1, i\,x_2 = a_1\,x_1 + C_1,\ i\,x_3 = a_2\,x_1 + C_2; \tag{2}$$

$$x_1 = x_1,\ x_2 = x_2,\ i\,x_3 = a_1\,x_1 + b_1\,x_2 + C_1,\ i\,x_4 = a_2\,x_1 + b_2\,x_2 + C_2, \tag{3}$$

$$x_1 = x_1,\ \ x_2 = x_2,\ \ i\,x_3 = a_1\,x_1 + b_1\,x_2 + C_1,\ \ i\,x_4 = a_2\,x_1 + b_2\,x_2 + C_2,$$

$$i\,x_5 = a_3\,x_1 + b_3\,x_2 + C_3, \qquad i = \sqrt{-1}; \tag{4}$$

der euklidischen komplexen Räume R_2, R_3, R_4, R_5 bezogen auf kartesische Koordinaten x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. Zählen wir komplexe Parameter, so ergeben sich auf diese Weise ∞^1 isotrope Gerade in R_2, ∞^3 isotrope Gerade in R_3, ∞^3 vollisotrope Ebenen in R_4 und ∞^6 vollisotrope Ebenen in R_5. Im Falle (2) und (3) sprechen wir von einem Komplex, im Falle (4) von einem Hexakomplex. Im Falle (4) setzen wir zur Erfüllung der den Koeffizienten gestellten Orthogonalitätsbedingungen

$$\begin{aligned} x_3 &= i\cos\varphi \qquad\quad x_1 + i\cos\chi \qquad\quad x_2 + a_3, \\ x_4 &= i\sin\varphi\cos\psi\, x_1 + i\sin\chi\cos\omega\, x_2 + \beta_3,\ \ \operatorname{tg}\varphi = -\frac{\cot\chi}{\cos(\psi-\omega)} \\ x_5 &= i\sin\varphi\sin\psi\, x_1 + i\sin\chi\sin\omega\, x_2 + \gamma_3, \end{aligned} \tag{5}$$

und erhalten

$$g_{11} = \sum_{k=1}^{5}\left(\frac{\partial x_k}{\partial x_1}\right)^2 = g_{12} = \sum_{k=1}^{5}\frac{\partial x_k}{\partial x_1}\frac{\partial x_k}{\partial x_2} = g_{22} = \sum_{k=1}^{5}\left(\frac{\partial x_k}{\partial x_2}\right)^2 \equiv 0\,\{x_1, x_2\}.$$

Damit ist gezeigt: *der Hexakomplex der vollisotropen Ebenen des R_5 gestattet die transzendente Darstellung* (5). Die sechs unabhängigen Parameter dieser Darstellung sind ψ, χ, ω, α_3, β_3, γ_3. Schreibt man

$$\varphi = -i\,lg\,\tau_1, \psi = -i\,lg\,\tau_2, \chi = -i\,lg\,\tau_3, \omega = -i\,lg\,\tau_4,$$

so ergibt sich eine *algebraische Darstellung des Hexakomplexes* in der Form

$$x_3 = \frac{i}{2}\left(\tau_1 + \frac{1}{\tau_1}\right) x_1 + \frac{i}{2}\left(\tau_3 + \frac{1}{\tau_3}\right) x_2 + \alpha_3,$$

$$x_4 = \frac{1}{4}\left(\tau_1 - \frac{1}{\tau_1}\right)\left(\tau_2 + \frac{1}{\tau_2}\right) x_1 + \frac{1}{4}\left(\tau_3 - \frac{1}{\tau_3}\right)\left(\tau_4 + \frac{1}{\tau_4}\right) x_2 + \beta_3,$$

$$x_5 = -\frac{i}{4}\left(\tau_1 - \frac{1}{\tau_1}\right)\left(\tau_2 - \frac{1}{\tau_2}\right) x_1 - \frac{i}{4}\left(\tau_3 - \frac{1}{\tau_3}\right)\left(\tau_4 - \frac{1}{\tau_4}\right) x_2 + \gamma_3,$$

$$\tau_1^2 = \frac{\tau_3^2(\tau_2 + \tau_4)^2 - (\tau_2 - \tau_4)^2}{\tau_3^2(\tau_2 - \tau_4)^2 - (\tau_2 + \tau_4)^2}$$

und die sechs unabhängigen Parameter sind nunmehr τ_2, τ_3, τ_4, $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$. Im Folgenden verwenden wir indessen ausschließlich die Darstellung (5). Wir setzen:

$\mathfrak{e}_1 = \{i\cos\varphi, i\cos\chi, -1, 0, 0\}$, $\mathfrak{e}_2 = \{i\sin\varphi\cos\psi, i\sin\chi\cos\omega, 0, -1, 0\}$,

$\mathfrak{e}_3 = \{i\sin\varphi\sin\psi, i\sin\chi\sin\omega, 0, 0, -1\}$,

$\mathfrak{x} = \{x_1, x_2, x_3\, x_4, x_5\}$, $\alpha_3 = f$, $\beta_3 = g$, $\gamma_3 = h$

und erhalten damit aus (5)

$$\mathfrak{e}_1\mathfrak{x} + f = 0,\ \mathfrak{e}_2\mathfrak{x} + g = 0,\ \mathfrak{e}_3\mathfrak{x} + h = 0,\ \operatorname{tg}\varphi = \frac{-\cot\chi}{\cos(\psi - \omega)}. \quad (6)$$

Sind nun φ, ψ, χ, ω, f, g, h analytische Funktionen eines komplexen Parameters t, so ergibt sich aus (6) die allgemeinste einparametrige Schar vollisotroper Ebenen des R_5 in der Form

$$\mathfrak{e}_1(t)\,\mathfrak{x} + f(t) = 0,\ \mathfrak{e}_2(t)\,\mathfrak{x} + g(t) = 0,\ \mathfrak{e}_3(t)\,\mathfrak{x} + h(t) = 0,\ \operatorname{tg}\varphi(t) = \frac{-\cot\chi(t)}{\cos(\psi(t) - \omega(t))}. \quad (7)$$

§ 2. Die allgemeinen isotropen Kurven des R_5

Die einparametrige Schar vollisotroper Ebenen (7) enthält sechs unabhängige analytische Funktionen $\psi(t)$, $\chi(t)$, $\omega(t)$, $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$, also um drei mehr als den einfach isotropen Kurven des R_5 nach einem von *J. Lense* gegebenen Existenzsatz als willkürliche analytische Funktionen zukommen[10]. Wir benutzen diese Freiheit und setzen $\omega = \psi$, $\chi = t$. Damit ergibt sich aus (7) das System:

[10] *J. Lense*, Math. Annalen **112**, § 2, 151 (1935).

$$\begin{aligned} \mathfrak{e}_1(t)\,\mathfrak{x} + f(t) &= \quad i\sin t \qquad x_1 + i\cos t \qquad x_2 - x_3 \qquad + f(t) = 0, \\ \mathfrak{e}_2(t)\,\mathfrak{x} + g(t) &= -i\cos t\cos\psi\, x_1 + i\sin t\cos\psi\, x_2 \quad - x_4 \quad + g(t) = 0, \\ \mathfrak{e}_3(t)\,\mathfrak{x} + h(t) &= -i\cos t\sin\psi\, x_1 + i\sin t\sin\psi\, x_2 \qquad - x_5 + h(t) = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Dabei gilt für die Vektoren $\mathfrak{e}_1(t)$, $\mathfrak{e}_2(t)$, $\mathfrak{e}_3(t)$ identisch in t:

$$||\mathfrak{e}_\alpha\,\mathfrak{e}_\beta|| = \begin{Vmatrix} 0, & 0 & , & 0 \\ 0, & -\cos^2\psi & , & -\cos\psi\sin\psi \\ 0, & -\cos\psi\sin\psi, & & -\sin^2\psi \end{Vmatrix}, \alpha,\beta = 1,2,3;\ \mathfrak{e}_2^2\,\mathfrak{e}_3^2 - (\mathfrak{e}_2\,\mathfrak{e}_3)^2 = 0. \tag{9}$$

Gleichwohl sind die Gleichungen (8) linear unabhängig, denn ihre Koeffizientenmatrix hat den Rang 3. Wir können also die Konstruktion einer integrallosen Darstellung der isotropen Kurven des R_5 vom Typus (2,1) versuchen. Dann haben wir die Komponenten $x_1(t), \ldots, x_5(t)$ des Kurvenortsvektors $\mathfrak{x}(t)$ aus dem linearen inhomogenen System

$$\begin{array}{l|cccccc|} \mathfrak{e}_1'(t)\,\mathfrak{x} + f'(t) = 0, & i(\sin t)' & , i(\cos t)' & , f', & 0, & 0, & 0 \\ \mathfrak{e}_2'(t)\,\mathfrak{x} + g'(t) = 0, & -i(\cos t\cos\psi)' & , i(\sin t\cos\psi)' & , g', & 0, & 0, & 0 \\ \mathfrak{e}_3'(t)\,\mathfrak{x} + h'(t) = 0, & -i(\cos t\sin\psi)' & , i(\sin t\sin\psi)' & , h', & 0, & 0, & 0 \\ \mathfrak{e}_1(t)\,\mathfrak{x} + f(t) = 0, & * & , * & , *, & -1, & 0, & 0 \\ \mathfrak{e}_2(t)\,\mathfrak{x} + g(t) = 0, & * & , * & , *, & 0, & -1, & 0 \\ \mathfrak{e}_3(t)\,\mathfrak{x} + h(t) = 0, & * & , * & , *, & 0, & 0, & -1 \\ \end{array} = 0 \tag{10}$$

zu berechnen. Die Determinantenbedingung in (10) ist notwendig, da wir sechs lineare inhomogene Gleichungen für fünf Komponenten $x_1(t), \ldots, x_5(t)$ zu befriedigen haben[11]; sie bedeutet eine Bindung zwischen den vier Funktionen $\psi(t)$, $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$ und ihren ersten Ableitungen. Jede Lösung $\mathfrak{x}(t)$ des Systems (10) verwandelt das System (8) in eine Identität in t. Differenzieren wir deren Gleichungen nach t und berücksichtigen (10), so gewinnen wir in Ergänzung zu (9) die weiteren Identitäten:

$$\mathfrak{e}_1\,\mathfrak{x}' \equiv \mathfrak{e}_2\,\mathfrak{x}' \equiv \mathfrak{e}_3\,\mathfrak{x}' \equiv 0\ \}t\}. \tag{11}$$

Dann sind die so gewonnenen Kurven $\mathfrak{x}(t)$ isotrope Kurven in R_5.
Beweis: $\mathfrak{v} \neq 0$ sei ein willkürlicher Vektor. Wir bilden das Determinantenquadrat $(\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3, \mathfrak{x}', \mathfrak{v})^2$ und erhalten im Hinblick auf (8) und (11)

$$(\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3, \mathfrak{x}', \mathfrak{v})^2 = -(\mathfrak{v}\,\mathfrak{e}_1)^2\,\mathfrak{x}'^2[\sin^2\psi\cos^2\psi - (\sin\psi\cos\psi)^2] \equiv 0\ \{t, \mathfrak{v}\}.$$

Mit ihrem Quadrat verschwindet also auch die Determinante $(\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3\ \mathfrak{x}', \mathfrak{v})$ selbst identisch in t und $\mathfrak{v}$. Daher sind bereits die Vektoren des

[11] Die Darstellung ist „regulär speziell", vgl. (7), § 3.

Quadrupels $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3, \mathfrak{x}'$ linear abhängig und da $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3$ linear unabhängig sind[12], gilt:

$$\mathfrak{x}' = \lambda_1 \mathfrak{e}_1 + \lambda_2 \mathfrak{e}_2 + \lambda_3 \mathfrak{e}_3$$

und mit Rücksicht auf (11)

$$\mathfrak{x}'^2 = \lambda_1 \mathfrak{e}_1 \mathfrak{x}' + \lambda_2 \mathfrak{e}_2 \mathfrak{x}' + \lambda_3 \mathfrak{e}_3 \mathfrak{x}' \equiv 0 \{t\}.$$

Nachdem so der isotrope Charakter der Gratlinien der einparametrigen Ebenenschar (8) gesichert ist, berechnen wir aus (8) und (10) die Komponenten des isotropen Kurvenortsvektors $\mathfrak{x}$ und erhalten

$$\boxed{\begin{array}{l} x_1 = i f' \cos t + i \sin t(g' \cos \psi + h' \sin \psi), \\ x_2 = -i f' \sin t + i \cos t(g' \cos \psi + h' \sin \psi), \\ x_3 = f - (g' \cos \psi + h' \sin \psi), \quad x_4 = g + f' \cos \psi, \quad x_5 = h + f' \sin \psi \end{array}} \tag{12}$$

mit der Nebenbedingung

$$f' \psi' = g' \sin \psi - h' \cos \psi. \tag{13}$$

Die explizite Darstellung (12) *der isotropen Kurven des* R_5 *vom Typus* (2,1) *löst das Mongesche Problem*

$$x'^2_1 + x'^2_2 + x'^2_3 + x'^2_4 + x'^2_5 = 0$$

durch die Gratlinien einparametriger vollisotroper Ebenenscharen, deren Stellungsvektoren $\mathfrak{e}_1(t)$, $\mathfrak{e}_2(t)$, $\mathfrak{e}_3(t)$ *rein algebraisch aus den Elementen orthogonaler Matrizen berechnet werden. Von den mit ihren ersten Ableitungen in die Darstellung eingehenden vier analytischen Funktionen* $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$, $\psi(t)$ *bleiben entsprechend dem Existenzsatz drei willkürlich, die vierte bestimmt sich aus der Nebenbedingung* (13).

Wir zeigen jetzt an einem Beispiel, daß die Kurven der Darstellung (12) im allgemeinen nicht in einer vierdimensionalen Hyperebene des R_5 liegen. Wir setzen:

$$\psi = t, f = \tfrac{1}{2} t^2, g = \sin t - t \cos t, h = -(t \sin t + \cos t), g' = t \sin t,$$
$$h' = -t \cos t, (f' \psi' = g' \sin \psi - h' \cos \psi)$$

und erhalten damit aus (12) die isotrope Kurve

$$x_1 = i t \cos t, \; x_2 = -i t \sin t, \; x_3 = \tfrac{1}{2} t^2, \; x_4 = \sin t, \; x_5 = -\cos t. \tag{14}$$

Für die ersten Ableitungen ergibt sich

$$x_1' = i(\cos t - t \sin t), \; x_2' = -i(\sin t + t \cos t), \; x_3' = t, \; x_4' = \cos t,$$
$$x_5' = \sin t; \; x'^2_1 + x'^2_2 + x'^2_3 + x'^2_4 + x'^2_5 \equiv 0 \{t\}.$$

[12] Der Rang der Koeffizientenmatrix des Systems (8) ist 3.

Läge die Kurve (14) in einer Hyperebene

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 + \alpha_5 x_5 + \alpha_6 = 0, \tag{15}$$

so bestünde identisch in t:

$$i\,\alpha_1\, t \cos t - i\,\alpha_2\, t \sin t + \tfrac{1}{2}\,\alpha_3\, t^2 + \alpha_4 \sin t - \alpha_5 \cos t + \alpha_6 \equiv 0 \;\{t\}.$$

Für $t = 0$ ergibt sich daraus $\alpha_5 = \alpha_6$, für $t = 2\pi$, 4π ergibt sich $\alpha_1 = \alpha_3 = 0$ und für $t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$ schließlich

$$\frac{-i\pi}{2}\alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_5 = 0, \quad \frac{3i\pi}{2}\alpha_2 - \alpha_4 + \alpha_5 = 0, \quad \frac{-5i\pi}{2}\alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_5 = 0$$

und daher auch $\alpha_2 = \alpha_4 = \alpha_5 = 0$. Mithin liegt die Kurve (14) nicht auf der Hyperebene (15), wohl aber auf dem Schnitt der beiden vierdimensionalen Hyperzylinder

$$2 x_3 + x_1^2 + x_2^2 = 0, \; x_4^2 + x_5^2 = 1,$$

wie sich durch Elimination des Kurvenparameters aus den ersten fünf der Gleichungen (14) ergibt.

§ 3. Die hypersphärischen und zweifach isotropen Kurven des R_5

Wir bilden die Quadratsumme der Komponenten $x_1, \ldots, x_5$ der expliziten Darstellung (12) und erhalten

$$\mathfrak{x}^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 = f^2 + g^2 + h^2 + 2\cos\psi(f'\,g - f g') + \\ + 2\sin\psi(f'\,h - h'\,f). \tag{16}$$

Der Ausdruck (16) enthält gleichwie die Bedingung (13) die Ableitungen g' und h' linear. Verstehen wir unter der Konstanten r den Radius einer Hyperkugel des R_5, so gilt für die hypersphärischen unter den isotropen Kurven (12)

$$f^2 + g^2 + h^2 + 2\cos\psi(f'\,g - f g') + 2\sin\psi(f'\,h - h'\,f) = r^2,$$
$$f'\,\psi' = g'\sin\psi - h'\cos\psi, \tag{17}$$

oder, indem wir nach g' und h' auflösen:

$$g' = \frac{1}{f}\left(\cos^2\psi\, f' g + \cos\psi\sin\psi\, f' h + f f'\sin\psi\,\psi' + \cos\psi\,\frac{f^2+g^2+h^2-r^2}{2}\right),$$

$$h' = \frac{1}{f}\left(\cos\psi\sin\psi\, f' g + \sin^2\psi\, f' h + f f'\cos\psi\,\psi' + \sin\psi\,\frac{f^2+g^2+h^2-r^2}{2}\right). \tag{18}$$

Damit ergeben sich zwei Nebenbedingungen für die vier analytischen Funktionen $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$, $\psi(t)$: *die allgemeinen hypersphärischen isotropen Kurven des R_5 hängen von zwei analytischen Funktionen ab.*

Das gilt auch im Falle $r = 0$ für die allgemeinen isotropen Kurven auf dem isotropen Hyperkegel $\mathfrak{x}^2 = 0$ des R_5. Wir setzen jetzt:

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{e},\ \mathfrak{x}' = \mathfrak{e}',\ \mathfrak{x}^2 = \mathfrak{x}'^2 = \mathfrak{e}^2 = \mathfrak{e}'^2 = 0 \tag{19}$$

und betrachten also die isotropen Kurven auf dem isotropen Hyperkegel $\mathfrak{e}^2 = 0$ des R_5 und merken für später die aus den Voraussetzungen (19) folgenden Identitäten an:

$$\mathfrak{e}^2 = \mathfrak{e}\mathfrak{e}' = \mathfrak{e}\mathfrak{e}'' = \mathfrak{e}\mathfrak{e}''' = 0,\ \mathfrak{e}'^2 = \mathfrak{e}'\mathfrak{e}'' = 0,\ (\mathfrak{e}, \mathfrak{e}', \mathfrak{e}'', \mathfrak{e}''', \mathfrak{e}'''')^2 = (\mathfrak{e}''^2)^5. \tag{20}$$

Denken wir uns jetzt den Vektor $\mathfrak{e}(t)$ aus (12) und (18) mit $r = 0$ in allgemeiner Weise bestimmt, so hängt das Ergebnis von zwei analytischen Funktionen ab. Deuten wir dann den so bestimmten Vektor als Stellungsvektor einer einparametrigen Schar R_4-Schar in R_5, so ergibt sich nach früheren Ergebnissen eine integrallose Darstellung der zweifach isotropen Kurven $\mathfrak{y}(t)$ des R_5 vom maximalen Darstellungstypus (4,4), wofern $\mathfrak{e}''^2 \neq 0$[12]. Dann gelten für den Kurvenortsvektor $\mathfrak{y}(t)$ die Bestimmungsgleichungen

$$\mathfrak{e}\mathfrak{y} + \Phi = 0,\ \mathfrak{e}'\mathfrak{y} + \Phi' = 0,\ \mathfrak{e}''\mathfrak{y} + \Phi'' = 0,\ \mathfrak{e}'''\mathfrak{y} + \Phi''' = 0,$$
$$\mathfrak{e}''''\mathfrak{y} + \Phi'''' = 0. \tag{21}$$

$\mathfrak{y}(t)$ hängt nach dem Existenzsatz von zwei willkürlichen analytischen Funktionen ab. Wieder können wir daher über eine der in $\mathfrak{e}(t)$ steckenden Funktionen frei verfügen und gleichwohl zusammen mit der anderen und der neu hinzutretenden analytischen Funktion $\Phi(t)$ ein allgemeines Resultat erwarten. Wir setzen entsprechend $f \equiv 1$ und erhalten mit $r = 0$ aus (18) die einfachen Bedingungen

$$g' = \Theta \cos\psi,\ h' = \Theta \sin\psi,\ \ \Theta = \Theta(t) = \frac{1+g^2+h^2}{2},\ (\Theta' = gg' + hh'). \tag{22}$$

Damit ergibt sich im Hinblick auf (12) für den Stellungsvektor $\mathfrak{e}(t)$ und seine erste und zweite Ableitung

$$\mathfrak{e} = \{i \sin t\ .\ \Theta,\ i\cos t\ \Theta,\ 1 - \Theta,\ g, h\},\ \mathfrak{e}^2 = 0,$$

$$\mathfrak{e}' = \{i\cos t\ .\ \Theta + i\sin t\,\Theta',\ -i\sin t\,\Theta + i\cos t\,\Theta',\ -\Theta', g', h'\},\ \mathfrak{e}'^2 = 0,$$

$$\mathfrak{e}'' = \{i\sin t(\Theta'' - \Theta) + 2i\cos t.\,\Theta',\ i\cos t(\Theta'' - \Theta) - 2i\sin t\,\Theta',\ -\Theta'', g'', h''\},$$
$$\mathfrak{e}''^2 = 2\,\Theta\Theta'' - 3\,\Theta'^2 + \Theta^2(\psi'^2 - 1).$$

Der Erfolg der Methode hängt davon ab, daß es gelingt, auch unter den vereinfachten Nebenbedingungen (22) Stellungsvektoren $\mathfrak{e}(t)$ zu berechnen, welche den Bedingungen

$$\mathfrak{e}^2 = \mathfrak{e}'^2 = 0,\ (\mathfrak{e}, \mathfrak{e}', \mathfrak{e}'', \mathfrak{e}''', \mathfrak{e}'''')^2 = (\mathfrak{e}''^2)^5 \neq 0$$

genügen. Für die spezielle Lösung

$$g=(2+\sqrt{3})\sin 2t, h=-(2+\sqrt{3})\cos 2t, \psi=2t, \Theta=\frac{1+g^2+h^2}{2}=4+2\sqrt{3}$$

trifft dies zu. Denn man erhält

$$g' = \Theta\cos\psi = (4+2\sqrt{3})\cos 2t,\ h' = \Theta\sin\psi = (4+2\sqrt{3})\sin 2t$$

und daher

$$\mathfrak{e}(t) = \{i(4+2\sqrt{3})\sin t, i(4+2\sqrt{3})\cos t, -3-2\sqrt{3}, (2+\sqrt{3})\sin 2t, -(2+\sqrt{3})\cos 2t\},\ \mathfrak{e}^2 = 0,$$

$$\mathfrak{e}'(t) = \{i(4+2\sqrt{3})\cos t, -i(4+2\sqrt{3})\sin t, 0, (4+2\sqrt{3})\cos 2t, (4+2\sqrt{3})\sin 2t\},\ \mathfrak{e}'^2 = 0,$$

$$\mathfrak{e}''(t) = \{-i(4+2\sqrt{3})\sin t, -i(4+2\sqrt{3})\cos t, 0, -(8+4\sqrt{3})\sin 2t, (8+4\sqrt{3})\cos 2t\},\ \mathfrak{e}''^2 = 3(4+2\sqrt{3})^2 \neq 0.$$

Die Vereinfachung $f \equiv 1$ bedroht also nicht die für die Darstellung notwendige lineare Unabhängigkeit der Vektoren $\mathfrak{e}, \mathfrak{e}', \mathfrak{e}'', \mathfrak{e}''', \mathfrak{e}''''$. Schließlich können wir die Bedingungen (22) durch die äquivalenten

$$M(g, h, g', h') = g'^2+h'^2-{}^1/_4(1+g^2+h^2)^2 = 0,\ \psi(t) = \operatorname{arctg}\frac{h'}{g'} \qquad (23)$$

ersetzen. Damit ist gezeigt: *die aus* (21) *hervorgehenden explizite Darstellung der allgemeinen zweifach isotropen Kurven des* R_5 *vom Typus* (4,4) *löst das Mongesche Problem*

$$y_1'^2 + y_2'^2 + y_3'^2 + y_4'^2 + y_5'^2 = 0, \quad y_1''^2 + y_2''^2 + y_3''^2 + y_4''^2 + y_5''^2 = 0$$

durch die Gratlinien einparametriger vierdimensionaler Hyperebenenscharen, deren zweifach isotroper Stellungsverkehr $\mathfrak{e}(t)$ *aus der expliziten Darstellung* (12) *vom Typus* (2,1) *unter den Nebenbedingungen* (23) *hervorgeht.*

§ 4. Diskussion der Nebenbedingungen (13) und (23)

Die in den beiden vorhergehenden Abschnitten gefundenen expliziten Darstellungen der einfach und zweifach isotropen Kurven des R_5 verwandeln sich in integrallose Darstellungen im praktisch strengen Sinne,

sofern es gelingt, die Lösungen der Nebenbedingungen (13) und (23), welche selbst wieder (nichteuklidische) *Monge*sche Probleme darstellen, integrallos herzuleiten.

Wir beschränken uns dabei vornehmlich auf die erste der beiden Gleichungen (23) und deuten diese als *Monge*sche Differentialgleichung des isotropen Komplexes eines dreidimensionalen *Riemann*schen Raumes der Metrik

$$g_{11} = (1 + g^2 + h^2)^2,\ g_{12} = g_{13} = 0,\ g_{22} = -4,\ g_{23} = 0,\ g_{33} = -4.$$

Transformieren wir auf neue Koordinaten gemäß

$$t = \bar{x}_1,\ g = \operatorname{tg} \bar{x}_2 \cos \bar{x}_3,\ h = \operatorname{tg} \bar{x}_2 \sin \bar{x}_3,\ \frac{\partial(t, g, h)}{\partial(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)} = \sin \bar{x}_2 \cos^{-3} \bar{x}_2 \neq 0,$$

so erhalten wir die neuen Tensorkomponenten

$$\bar{g}_{11} = \cos^{-4} \bar{x}_2,\ \bar{g}_{12} = \bar{g}_{13} = 0,\ \bar{g}_{22} = -4 \cos^{-4} \bar{x}_2,\ \bar{g}_{23} = 0,\ \bar{g}_{33} = -4 \operatorname{tg}^2 \bar{x}_2.$$

Die *Monge*sche der Gleichungen (23) geht dabei über in

$$M(\bar{x}_2,\ \bar{x}_2',\ \bar{x}_3') = 1 - 4\,\bar{x}_2'^2 - 4 \sin^2 \bar{x}_2 \cos^2 \bar{x}_2\, \bar{x}_3'^2 = 0,\ \left(' = \frac{d}{d\bar{x}_1}\right) \tag{24}$$

mit der dual zugeordneten *Hamilton*schen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung[13]

$$H\left(\bar{x}_2, \frac{\partial \bar{x}_3}{\partial \bar{x}_1}, \frac{\partial \bar{x}_3}{\partial \bar{x}_2}\right) = 4p^2 - q^2 - \sin^{-2} \bar{x}_2 \cos^{-2} \bar{x}_2 = 0,\ \left(p = \frac{\partial \bar{x}_3}{\partial \bar{x}_1},\ q = \frac{\partial \bar{x}_3}{\partial \bar{x}_2}\right). \tag{25}$$

Sind A und B willkürliche Konstanten, so ist

$$\bar{x}_3 = \frac{\sqrt{A}}{2}\,\bar{x}_1 + \int \frac{\sqrt{A \sin^2 2\,\bar{x}_2 - 4}}{\sin 2\,\bar{x}_2}\, d\,\bar{x}_2 + B \tag{26}$$

ein vollständiges Integral der *Hamilton*schen Gleichung (25)[14]. Das Integral der rechten Seite in (26) ist aus der *Legendre*schen Theorie elliptischer Integrale dritter Gattung bekannt. Wir setzen $2\,\bar{x}_2 = u$, $\frac{1}{2}\sqrt{A} = k = s$ und erhalten an Stelle von (26) das vollständige Integral

[13] Vgl. z. B. *R. Courant-D. Hilbert*, Methoden der mathematischen Physik II, Kap. 2, § 5, 72—73, Berlin, J. Springer 1937.

[14] Vgl. *E. Kamke*, Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen II, 208, (6, 74), Leipzig 1944.

$$k\,\bar{x}_1 + i\int \frac{\sqrt{1-k^2\sin^2 u}}{\sin u}\,du - \bar{x}_3 + B = s\bar{x}_1 + i\,[D_2(2\,\bar{x}_2, s) -$$

$$- s^2\,D_1(2\,\bar{x}_2, s)] - \bar{x}_3 + B = 0 \tag{27}$$

mit

$$D_1(2\,\bar{x}_2, s) = -\frac{1}{s}\frac{d}{ds}\int \frac{\sqrt{1-s^2\sin^2 u}}{\sin u}\,du = \frac{1}{s}\lg\frac{\sqrt{1-s^2\sin^2 u} - s\cos u}{1-s},$$

$$D_2(2\,\bar{x}_2, s) = \lg\frac{\sqrt{1-s^2\sin u}}{\cos u + \sqrt{1-s^2\sin^2 u}},\ u = 2\,\bar{x}_2.^{15} \tag{28}$$

Wir führen in (27) die willkürliche analytische Funktion $\Psi(s) = B(s)$ ein und erhalten das allgemeine Integral der *Hamilton*schen Gleichung (25) in der Form

$$\omega_1 \equiv s\,\bar{x}_1 + i[D_2(2\,\bar{x}_2, s) - s^2\,D_1(2\,\bar{x}_2, s)] - \bar{x}_3 + \Psi(s) = 0.$$

Durch Differentiation nach s entsteht mit Rücksicht auf (28)

$$\omega_2 \equiv \bar{x}_1 + i\,\frac{d}{ds}\int \frac{\sqrt{1-s^2\sin^2 u}}{\sin u}\,du + \dot{\Psi}(s) = \bar{x}_1 - i\,s\,D_1 + \dot{\Psi} = 0,$$

$$\omega_3 \equiv \qquad\qquad = -i(D_1 + s\,\dot{D}_1) + \ddot{\Psi} = 0,$$

$$\left(\cdot = \frac{d}{ds}\right).$$

Nach (28) gilt

$$D_1 = \frac{1}{s}\lg(*),\ \dot{D}_1 = -\frac{1}{s^2}\lg(*) + \ldots,\ s\,\dot{D}_1 = \frac{-1}{s}\lg(*) + \ldots,\ D_1 + s\,\dot{D}_1 =$$

$$= \frac{1}{1-s}\cdot\frac{1-(sv^2 + \sqrt{1-v^2-s^2v^2+s^2v^4})}{1-s(sv^2+\sqrt{1-v^2-s^2v^2+s^2v^4})}$$

und die Gleichung $w_3 = 0$ ist daher eine in $v = \sin 2\,\bar{x}_2$, $(\sqrt{1-v^2} = \cos 2\,\bar{x}_2)$, *algebraische Gleichung*, die sich auf eine in v *rein quadratische Gleichung* reduziert, da sich der biquadratische Term s^2v^4 im Verlauf der Rechnung heraushebt. Man erhält:

$$v = \sin u = \sin 2\,\bar{x}_2 = \sqrt{\ddot{\Psi}\,\frac{2i + (s^2-1)\,\ddot{\Psi}}{[-1+i(s-1)\,\ddot{\Psi}]\,[1-i\,s(s+1)]\ddot{\Psi}]}} = w(s, \ddot{\Psi})$$

und damit

---

[15] Vgl. z. B. *W. Gröbner* und *N. Hofreiter*, Integraltafel I, 60, 65, Wien, Springer 1949.

$$\bar{x}_1 = t = i\,s\,D_1(\arcsin w(s, \ddot{\Psi}), s) - \dot{\Psi} = t(s, \dot{\Psi}, \ddot{\Psi}),$$

$$\bar{x}_2 = \operatorname{arctg}\sqrt{g^2 + h^2} = \tfrac{1}{2}\arcsin w(s, \ddot{\Psi}),\ g^2 + h^2 =$$
$$= \operatorname{tg}^2(\tfrac{1}{2}\arcsin w(s, \ddot{\Psi})) = \Pi_1(s, \ddot{\Psi}),$$

$$\bar{x}_3 = \operatorname{arctg}\frac{h}{g} = i\,s^2 D_1 + i(D_2 - s^2 D_1) - s\dot{\Psi} + \Psi = i\,D_2 - s\dot{\Psi} + \Psi =$$
$$= \Pi_2(s, \Psi, \dot{\Psi}, \ddot{\Psi}),$$

mit bekannten Funktionen D_1, D_2, Π_1, Π_2. Schließlich erhalten wir

$$\frac{h^2 + g^2}{g^2} = \cos^{-2}\Pi_2,\ g = \cos\Pi_2\sqrt{\Pi_1},\ h = \sin\Pi_2\sqrt{\Pi_1},\ h' = \dot{h}\frac{ds}{dt},\ g' = \dot{g}\frac{ds}{dt},$$

$$\psi(t) = \psi(s) = \operatorname{arctg}\frac{h'}{g'} = \operatorname{arctg}\frac{\dot{h}}{\dot{g}} = \operatorname{arctg}\frac{2\Pi_1\dot{\Pi}_2\cos\Pi_2 + \dot{\Pi}_1\sin\Pi_2}{-2\Pi_1\dot{\Pi}_2\sin\Pi_2 + \dot{\Pi}_1\cos\Pi_2}.$$

Damit ist gezeigt: *die aus* (21) *hervorgehende Darstellung der allgemeinen zweifach isotropen Kurven des* R_5 *kann durch integrallose Darstellung der Lösungen der Nebenbedingung* (23) *auch im strengen Sinne integrallos gestaltet werden; die Darstellung hängt in Übereinstimmung mit dem Existenzsatz von zwei willkürlichen analytischen Funktionen* $\Phi(t)$ *und* $\Psi(t)$ *und ihren Ableitungen ab.*

Damit ist auch die Frage nach der integrallosen Darstellbarkeit der vollisotropen Torsen des R_5

$$\mathfrak{z}(u, v) = \mathfrak{y}(u) + v\,\mathfrak{y}'(u),\ \mathfrak{y}'^2 = \mathfrak{y}''^2 = 0,\ \mathfrak{y}'''^2 \neq 0$$

zu bejahen.

Auch das mit der expliziten Darstellung (12) der einfach isotropen Kurven verknüpfte *Monge*sche Problem der Nebenbedingung (13) erscheint der eben entwickelten Methode zugänglich, ohne daß wir darauf näher eingehen wollen. Die Differentialgleichung (13) kann überdies durch die Substitution $\xi = \operatorname{tg}\frac{\psi}{2}$ in eine *Riccatische* Differentialgleichung verwandelt werden. Beschränkt man dann die noch frei verfügbaren Koeffizientenfunktionen f, g, h auf solche, mit welchen diese *Riccati*sche Differentialgleichung geschlossen integrabel ist, so sind mit diesen Integralen stets integrallose Darstellungen der zugehörigen einfach isotropen Kurven des R_5 gewonnen. Verzichtet man auf geschlossene Darstellungen der Funktion $\psi(t)$, so kann die Differentialgleichung (13) auch zur Konstruktion einer Reihenentwicklung

$$\psi(t) = \psi(\bar{t}) + \frac{t-\bar{t}}{1!}\psi'(\bar{t}) + \frac{(t-\bar{t})^2}{2!}\psi''(\bar{t}) + \dots$$

benutzt werden. Diese vereinfacht sich wesentlich, wenn man Lösungen $\psi(t)$ ausschließt, für die stets

$$\psi(t) - k\pi \not\equiv 0\,\{t, k\},\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

gilt. Entwickelt man dann an der Stelle $\bar{t}$, wo jetzt $\psi(\bar{t}) = n\pi$, so reduzieren sich die Ableitungen $\psi', \psi'', \dots$ in $t = \bar{t}$ nach (13) stets auf Werte von Aggregaten der Funktionen f, g, h und ihrer Ableitungen an der Stelle $t = \bar{t}$.[16]

§ 5. Die diskriminierenden Lösungen

Die Lösungen eines *Monge*schen Problems (in zwei abhängigen und einer unabhängigen Veränderlichen), deren erste Variation verschwindet, nennt *D. Hilbert* diskriminierende Lösungen.[17] Sie fallen mit denjenigen Lösungen zusammen, welche von den integrallosen Darstellungen der Integralkurven (falls solche existieren) ausgelassen werden. Im Falle der isotropen Kurven des n-dimensionalen komplexen euklidischen Raumes handelt es sich um die *Monge*sche Gleichung

$$-x_n'^2 = 1 + x_2'^2 + \dots + x_{n-1}'^2,\ n \geqq 3,\ \left(' = \frac{d}{d\,x_1}\right)$$

und das Variationsproblem

$$\delta J = \pm i\,\delta\,x_n = \delta \int_{x_1^{(0)}}^{x_1^{(1)}} \sqrt{1 + x_2'^2 + \dots + x_{n-1}'^2}\,d\,x_1 =$$

$$= \delta \int_{x_1^{(0)}}^{x_1^{(1)}} F(x_2', \dots, x_{n-1}')\,d\,x_1 = 0. \tag{29}$$

Man erhält für die $n-2$ zweiten Ableitungen $x_2'', x_3'', \dots, x_{n-1}''$ die $n-2$ linearen homogenen *Euler-Lagrange*schen Bedingungen[18]

[16] Nach einer Bemerkung von *H. Grunsky* gewinnt man einen Überblick über die auszuschließenden Funktionen durch Uniformisieren der (hyperbolischen) universellen Überlagerungsfläche der an den Stellen $k\pi$ punktierten Ebene. Der Wertevorrat einer auszuschließenden Funktion gehört ganz einer solchen Fläche an, die konforme Abbildung läßt sich explizit mit Hilfe der elliptischen Modulfunktion und elementaren Funktionen angeben.

[17] Vgl. (4), 106—108.

[18] Vgl. *R. Courant-D. Hilbert*, Methoden der mathematischen Physik I, Kap. 4, § 3, 169, Berlin, J. Springer 1924.

$$
\begin{aligned}
-[F]_{x_1} &= F_{x_1' x_2'}\, x_2'' + F_{x_1' x_3'}\, x_3'' + \ldots F_{x_1' x'_{n-1}}\, x''_{n-1} = 0\\
-[F]_{x} &= F_{x_2' x_3'}\, x_2'' + F_{x_2' x_3'}\, x_3'' + \ldots F_{x_2' x'_{n-1}}\, x''_{n-1} = 0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
-[F]_{x_{n-1}} &= F_{x'_{n-1} x_2'}\, x_2'' + F_{x'_{n-1} x_3'}\, x_3'' + \ldots F_{x'_{n-1} x'_{n-1}}\, x''_{n-1} = 0
\end{aligned}
$$

mit der *Legendre*schen Determinante

$$
|F_{x'_\alpha x'_\beta}| = \frac{(\pm i)^{n-2}}{x_n'^{3(n-2)}} \,|\, x_\alpha' x_\beta' + \delta_{\alpha\beta} x_n'^2 \,|,\quad \delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1, & \alpha = \beta,\\ 0, & \alpha \neq \beta, \end{cases}\quad \alpha,\beta = 2,3,\ldots,n-1.
$$

Dabei muß $x_n' = \pm i\sqrt{1 + x_2'^2 + \ldots + x_{n-1}'^2} \neq 0$ vorausgesetzt werden, die Kurve $\mathfrak{x}^* = \{x_1, x_2(x_1) \ldots, x_{n-1}(x_1)\}$ im $(n-1)$-dimensionalen Projektionsraum der $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ ist also notwendig anisotrop. Damit verwandelt sich das Variationsproblem (29) in die Aufgabe, die nichtisotropen geodätischen Linien des euklidischen $(n-1)$-dimensionalen Projektionsraumes der $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ zu bestimmen. Man erhält die Geraden dieses Raumes. $x_2(x_1), \ldots, x_{n-1}(x_1)$ sind also notwendig lineare Funktionen und dasselbe gilt dann auch für $x_n(x_1)$. Da wir für keine dieser Funktionen konstantes Verhalten für alle x_1 zulassen, folgt: *die diskriminierenden isotropen Kurven des euklidischen n-dimensionalen Raumes, welche keinem seiner nichtisotropen linearen Unterräume angehören, sind die isotropen Geraden.*

In Übereinstimmung damit bestätigt man für $n = 3, 4, 5$ leicht, daß die *Legendre*sche Determinante nicht verschwindet:

$$
n = 3,\ |F_{x'_\alpha x'_\beta}| = \frac{\pm i}{x_3'^3} \neq 0,\quad n = 4,\ |F_{x'_\alpha x'_\beta}| = \frac{1}{x_4'^4} \neq 0,
$$

$$
n = 5,\ |F_{x'_\alpha x'_\beta}| = \frac{\pm i}{x_5'^5} \neq 0.
$$

Auch die diskriminierenden Lösungen des *Monge*schen Problems (23) oder (24) können nach dieser Methode bestimmt werden.

Asymptotische Eigenschaften von Maximum-Likelihood Schätzwerten bei einem stochastischen Prozeß

Von

Walter Vogel, Tübingen

(Eingelangt am 30. März 1956)

Einleitung

Wir betrachten ein Experiment, welches wiederholt durchgeführt werden soll. Das Auskommen dieses Experiments sei die zufällige Größe $X(s, \Theta)$ mit der Wahrscheinlichkeitsdichte $\varphi(x, s, \Theta)$. Θ habe den festen, unbekannten Wert Θ_0. Der Parameter s kann beliebig gewählt werden, der Experimentator muß also bei der Durchführung des n-ten Experimentes einen Wert für s vorgeben. Es liegt nun nahe, diesen Wert auf Grund der schon beobachteten Auskommen der vorhergehenden Experimente zu wählen. Dadurch wird s eine zufällige Größe und die Folge der Experimente wird durch den stochastischen Prozeß $S_1, X_1, S_2, X_2, \ldots$ beschrieben. Dabei ist $S_n = s_n(X_1, X_2, \ldots X_{n-1})$ und $S_1 = s_1$ ist eine Konstante. X_n hat bezüglich $S_n = s$ die bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte $\varphi(x, s, \Theta_0)$. Die Funktionen s_n sind fest vorgegeben. Man wird sie so wählen, daß der Prozeß in einer gewünschten Weise gesteuert wird.

Beispiel: $\mathfrak{E}(X_n^2)$ soll für alle n möglichst klein bleiben. Man bestimme $s = g(\Theta)$ so, daß $\int x^2 \varphi(x, s, \Theta)\, dx$ ein Minimum wird und wähle $S_n = g(\hat{\Theta}_{n-1})$, wobei $\hat{\Theta}_{n-1} = \hat{\Theta}_{n-1}(X_1, \ldots, X_{n-1})$ ein Schätzwert für Θ_0 ist.

Wir interessieren uns in dieser Arbeit für den *Maximum-Likelihood Schätzwert* für Θ_0, d. h. für die Funktion $\hat{\Theta}_n(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, welche den Ausdruck $L_n(\Theta) = \prod_{i=1}^{n} \varphi(X_i, s_i(X_1 \ldots X_{n-1}), \Theta)$ zum Maximum macht. Wir wollen zeigen, daß unter gewissen Voraussetzungen folgendes gilt:

I. $P(\hat{\Theta}_n(X_1 \ldots X_n) \to \Theta_0) = 1$.

II. Sei $\hat{\Theta}_n$ eine Lösung der Gleichung $\frac{\partial \log L_n(\Theta)}{\partial \Theta}=0, P(\hat{\Theta} \to \Theta_0) = 1$ und $P(S_n \to s_0) = 1$. Dann gibt es asymptotisch normal verteilte zufällige Größen Y_n derart, daß $P(Y_n - \sqrt{n}(\hat{\Theta}_n - \Theta_0) \to 0) = 1$, $\mathfrak{E}(Y_n) = 0$ und $\mathfrak{E}(Y_n^2) \to 1/\lim \frac{1}{n} \mathfrak{E}\left(\left[\frac{\partial \log L_n}{\partial \Theta}\right]^2_{\Theta_0}\right)$ gilt.

Da für unverzerrte (*unbiased*) Schätzwerte die *Cramer-Rao*'sche Ungleichung (siehe *Cramér* [1])

$$\mathfrak{E}(n(\hat{\Theta}_n - \Theta_0)^2) \geqslant \frac{1}{\frac{1}{n} \mathfrak{E}\left(\left[\frac{\partial \log L_n}{\partial \Theta}\right]^2_{\Theta_0}\right)}$$

gilt, so bedeutet die letzte Beziehung, daß der Maximum-Likelihood Schätzwert asymptotisch wirksam (*efficient*) ist.

Die folgenden Beweise sind Verallgemeinerungen der Methoden von *Wald* [3], [4] und *Cramér* [1].

§ 1

$\varphi(x, s, \Theta)$ sei eine Wahrscheinlichkeitsdichte in x für jedes Paar $s \in \mathfrak{S}$ und $\Theta \in \Omega$. $\mathfrak{S}$ sei eine kompakte Menge und Ω ein kompakter metrischer Raum. Es sei $\sup_{|\Theta-\Theta'|<\varrho} \varphi(x, s, \Theta') = g(x, s, \Theta, \varrho)$. Zu Abkürzung werde $\varphi(x, s, \Theta_0) = \varphi_0$ gesetzt. Wir machen folgende Voraussetzungen:

(i) Für genügend kleine ϱ gilt $\int \langle \log g \rangle^2 \varphi_0 \, dx \leqslant A(\Theta)$.

(ii) $\varphi(x, s, \Theta)$ ist stetig in Θ, und zwar gleichmäßig in s.

(iii) Für jedes Θ ist $\int \langle \log \varphi \rangle \varphi_0 \, dx$ stetig als Funktion von s.

(iv) Für jedes Paar s, $\Theta \neq \Theta_0$ gilt $\varphi(x, s, \Theta) \neq \varphi(x, s, \Theta_0)$ für eine x-Menge mit positiver Wahrscheinlichkeit bezüglich φ_0.

Wir leiten einige Folgerungen aus diesen Voraussetzungen her.

Satz 1: $\int \langle \log \varphi(x, s, \Theta) \rangle \varphi_0 \, dx$ existiert und es ist

$$\lim_{\varrho \to 0} \int \langle \log g(x, s, \Theta, \varrho) \rangle \varphi_0 \, dx = \int \langle \log \varphi(x, s, \Theta) \rangle \varphi_0 \, dx,$$

und zwar gleichmäßig in s.

Beweis: $\log g(x, s, \Theta, \varrho)$ ist monoton fallend in ϱ. Ferner folgt aus (i) für alle genügend kleinen ϱ die Abschätzung $\left| \int \langle \log g \rangle \varphi_0 \, dx \right| \leqslant \int |\log g| \varphi_0 \, dx \leqslant 1 + A(\Theta)$. Dann ist aber $\lim_{\varrho \to 0} \int \langle \log g \rangle \varphi_0 \, dx = \int \langle \lim_{\varrho \to 0} \log g \rangle \varphi_0 \, dx = \int \langle \log \varphi(x, s, \Theta) \rangle \varphi_0 \, dx$.

Satz 2: Für $\Theta \neq \Theta_0$ gilt

$$\int \langle \log \varphi(x, s, \Theta) \rangle \varphi_0 \, dx - \int \langle \log \varphi(x, s, \Theta_0) \rangle \varphi_0 \, dx = -\eta(\Theta, s)$$

< 0 und $\inf_{s \varepsilon \mathfrak{S}} \eta(\Theta, s) > 0$.

Beweis: $\exp\{\int \langle \log \varphi \rangle \varphi_0 dx - \int \langle \log \varphi_0 \rangle \varphi_0 dx\} = \exp \int \langle \log \frac{\varphi}{\varphi_0} \rangle \varphi_0 \, dx$

$< \int \langle \exp \log \frac{\varphi}{\varphi_0} \rangle \varphi_0 \, dx = \int \varphi \, dx = 1$. Also ist

$$\int \langle \log \varphi \rangle \varphi_0 \, dx - \int \langle \log \varphi_0 \rangle \varphi_0 \, dx = -\eta(\Theta, s) < 0.$$

Dabei gilt wegen (iv) ein echtes Kleiner-Zeichen. Wir zeigen noch, daß $\inf_{s \varepsilon \mathfrak{S}} \eta(\Theta, s) > 0$ ist. Andernfalls gäbe es eine Folge $\{s_n\}$ derart, daß $s_n \to s \in \mathfrak{S}$ (da $\mathfrak{S}$ kompakt ist) und $\eta(\Theta, s_n) \to 0$. Wegen (iii) folgt dann: $0 = \lim \eta(\Theta, s_n) = \eta(\Theta, s) > 0$; also muß $\inf_{s \varepsilon \mathfrak{S}} \eta(\Theta, s) > 0$ sein.

Wir betrachten jetzt den stochastischen Prozeß $S_1, X_1, S_2, X_2, \ldots$ wobei X_n bezüglich $S_n = s$ die bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte $\varphi(x, s, \Theta_0)$ hat und $S_n = s_n(X_1 \ldots X_{n-1})$ ist. Alle Gleichungen und Pfeile zwischen zufälligen Größen sind mit Wahrscheinlichkeit 1 gemeint.

Satz 3: Sei ω eine kompakte Teilmenge von Ω und $\Theta_0 \notin \omega$. Dann gilt:

$$\frac{\sup_{\Theta \varepsilon w} \prod_{i=1}^{n} \varphi(X_i, \delta_i, \Theta)}{\prod_{i=1}^{n} \varphi(X_i, S_i, \Theta_0)} \to 0$$

(Der Quotient ist mit Wahrscheinlichkeit 1 definiert.)

Beweis: Aus Satz 1 und 2 folgt: zu jedem $\Theta \in \omega$ gibt es ein ϱ_Θ mit der Eigenschaft $\int \langle \log g \rangle \varphi_0 \, dx - \int \langle \log \varphi_0 \rangle \varphi_0 \, dx \leqslant -\frac{1}{2} \eta(\Theta, s)$, oder

$$\mathfrak{E}(\log g(X_i, S_i, \Theta, \varrho_\Theta) \mid X_1, X_2, \ldots, X_{i-1}) -$$
$$- \mathfrak{E}(\log \varphi(X_i, S_i, \Theta_0) \mid X_1, \ldots, X_{i-1}) < 0. \qquad (1)$$

Wir können die kompakte Menge ω mit endlich vielen, etwa k Mengen $\mathfrak{O}_\nu$ überdecken. $\mathfrak{O}_\nu = \{\Theta \mid |\Theta - \Theta_\nu| < \varrho_{\Theta_\nu}\}$; $\nu = 1, 2, \ldots, k$. Dann folgt: $\sup_{\Theta \varepsilon \omega} \prod_{i=1}^{n} \varphi(X_i, S_i, \Theta) \leqslant \sum_{\nu=1}^{n} \prod_{i=1}^{n} \sup_{\Theta \varepsilon \mathfrak{O}_\nu} \varphi(X_i, S_i, \Theta) = \sum_{\nu=1}^{n} \prod_{i=1}^{n} g(X_i, S_i, \Theta_\nu, \varrho_{\Theta_\nu})$.

Es reicht also zu zeigen, daß für $\nu = 1, 2, \ldots, k$ die Bezeichnung

$$\lambda_n^{(\nu)} = \frac{\prod_{i=1}^{n} g(X_i, S_i, \Theta_\nu, \varrho_\Theta)}{\prod_{i=1}^{n} \varphi(X_i, S_i, \Theta_0)} \to 0$$

gilt.

Es sei $U_i = \log g(X_i, S_i, \Theta_\nu, \varrho_{\Theta_\nu}) - \log \varphi(X_i, S_i, \Theta_0)$ und $\tilde{U}_i = U_i - \mathfrak{E}(U_i \mid X_1, X_2, \ldots, X_{i-1})$. Dann ist

$$\mathfrak{E}(\tilde{U}_i \mid \tilde{U}_1, \ldots, \tilde{U}_{i-1}) = 0. \tag{2}$$

Da man $(\log g)^2 = (\frac{|\log g| + \log g}{2})^2 + (\frac{|\log g| - \log g}{2})^2$ als Summe zweier in ϱ monotoner Funktionen darstellen kann und die Erwartungswerte der beiden Summanden wegen (i) gleichmäßig in ϱ beschränkt sind, so gilt $\lim\limits_{\varrho \to 0} \int \langle \log g \rangle^2 \varphi_0 \, dx = \int \langle \log \varphi(x, s, \Theta) \rangle^2 \varphi_0 \, dx \leqq A(\Theta)$. Daraus folgt $\mathfrak{E}(\tilde{U}_i^2) \leqq 2 \{\mathfrak{E}(U_i^2) + \mathfrak{E}(\mathfrak{E}^2(U_i \mid X_1, \ldots, X_{i-1}))\} \leqq 4 \, \mathfrak{E}(U_i^2) \leqq$ $\leqq 8 \{\mathfrak{E}(\langle \log g \rangle^2) + \mathfrak{E}(\langle \log \varphi_0 \rangle^2)\} \leqq 8(A(\Theta_\nu) + A(\Theta_0))$, d. h. es gilt die Ungleichung

$$\mathfrak{E}(\tilde{U}_i^2) \leqq 8 \, (A(\Theta_\nu) + A(\Theta_0)). \tag{3}$$

Es ist $\frac{1}{n} \log \lambda_n^{(\nu)} = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} U_i = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} \tilde{U}_i + \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} \mathfrak{E}(U_i \mid X_1, \ldots, X_{i-1})$. Wegen (2) und (3) gilt $\frac{1}{n} \sum\limits^{n} \tilde{U} \to 0$ (siehe *Loève* [2] S. 387) und nach (1) ist $\mathfrak{E}(U_i \mid X_1, \ldots, X_{i-1}) \leqq -\frac{1}{2} \inf\limits_{S \varepsilon \mathfrak{S}} \eta(\Theta_\nu, s) < 0$. Also folgt, daß mit Wahrscheinlichkeit 1 (für $n \to \infty$) $\frac{1}{n} \log \lambda_n^{(\nu)} < 0$, oder $\log \lambda_n^{(\nu)} \to \infty$, oder $\lambda_n^{(\nu)} \to 0$ gilt.

Satz 4: Sei $T_n(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ so gewählt, daß

$$\frac{\prod\limits_{i=1}^{n} \varphi(X_i, S_i, T_n)}{\prod\limits_{i=1}^{n} \varphi(X_i, S_i, \Theta_0)} \geqq a > 0$$

für alle n ist. Dann gilt: $T_n \to \Theta_0$.

Beweis: Wir zeigen, daß $P(\limsup |\, T_n - \Theta_0 \,| \geqq \varepsilon) = 0$ ist. Sei $\omega = \{\Theta \mid |\, \Theta - \Theta_0 \,| \geq \varepsilon\}$. Wenn für unendlichviele n die Ungleichung $|\, T_n - \Theta_0 \,| \geqq \varepsilon$ gilt, so gilt auch

$$\frac{\sup\limits_{\Theta \varepsilon \omega} \prod\limits_{i=1}^{n} \varphi(X_i, S_i, \Theta)}{\prod\limits_{i=1}^{n} \varphi(X, Se, \Theta_0)} \geqq \frac{\prod\limits_{i=1}^{n} \varphi(X_i, S_i, T_n)}{\prod\limits_{i=1}^{n} \varphi(X_i, S_i, \Theta_0)} \geq a > 0$$

für unendlichviele n. Dies ist aber nach Satz 3 ein Ereignis mit der Wahrscheinlichkeit Null.

Die Maximum-Likelihood Schätzwerte erfüllen die Voraussetzungen von Satz 4 (mit $a = 1$), es gilt also $P(\hat{\Theta}_n \to \Theta_0) = 1$. Damit ist Punkt I. der Einleitung bewiesen.

Anmerkung: Eine Möglichkeit, die Bedingungen über Ω zu lockern steht bei *Wald* [4].

§ 2

Gegeben sei der Prozeß $S_1, X_1, S_2, X_2, \ldots$, wie in der Einleitung. Es sei $\prod_{i=1}^{n} \varphi(X_i, S_i, \Theta) = L_n(\Theta)$ und $\hat{\Theta}_n$ sei eine Lösung der Gleichung $\frac{\partial \log L_n(\Theta)}{\partial \Theta} = 0$. Ferner gelte $P(\hat{\Theta}_n \to \Theta_0) = 1$ und $P(S_n \to s_0) = 1$, dabei sei s_0 eine Konstante. Wir setzen $\left[\frac{\partial^2 \log \varphi(X_i, S_i, \Theta)}{\partial \Theta^2}\right]_{\Theta_0} = V_i$.

Alle Beziehungen zwischen zufälligen Größen sind Beziehungen mit Wahrscheinlichkeit 1. Es soll gelten:

(i) $\mathfrak{E}(V_i^2 \mid S_i) \leq A$.

(ii) $\mathfrak{E}(V_i \mid S_i)$ sei stetig als Funktion von s.

(iii) $\left|\frac{\partial^3 \log \varphi(x, s, \Theta)}{\partial \Theta^3}\right| \leq H(x, s)$ für alle Θ einer Umgebung von Θ_0. Für H gelte: $\mathfrak{E}(H^2(X_i, S_i) \mid S_i) \leq B$.

(iv) Für alle s sei $\int \sup \left|\frac{\partial \varphi(x, s, \Theta)}{\partial \Theta}\right| dx < \infty$ und $\int \sup \left|\frac{\partial^2 \varphi(x, s, \Theta)}{\partial \Theta^2}\right| dx < \infty$, wobei die Suprema über alle Θ einer Umgebung von Θ_0 zu bilden sind.

Wir wollen eine zufällige Größe Y_n konstruieren und zeigen:

(a) Y_n ist asymptotisch normal verteilt.

(b) $Y_n - \sqrt{n}(\hat{\Theta}_n - \Theta_0) \to 0$.

(c) $\mathfrak{E}(Y_n) = 0$.

(d) $\mathfrak{E}(Y_n^2) \to 1/c$, wobei $c = \lim \frac{1}{n} \mathfrak{E}\left(\left[\frac{\partial \log L_n}{\partial \Theta}\right]_{\Theta_0}^2\right)$ ist.

Satz 1: Für $i < k$ gilt:

$$\mathfrak{E}\left(\left[\frac{\partial \log \varphi(X_i, S_i, \Theta)}{\partial \Theta}\right]_{\Theta_0} \cdot \left[\frac{\partial \log \varphi(X_k, S_k, \Theta)}{\partial \Theta}\right]_{\Theta_0}\right) = 0.$$

Beweis: Für jedes s gilt wegen (iv)

$$0 = \left[\frac{\partial}{\partial \Theta} \int \varphi \, dx\right]_{\Theta_0} = \int \left[\frac{\partial}{\partial \Theta} \log \varphi\right]_{\Theta_0} \varphi_0 \, dx.$$

Damit folgt

$$\mathfrak{E}\left(\left[\frac{\partial \log \varphi(X_k, S_k, \Theta)}{\partial \Theta}\right]_{\Theta_0} \mid X_1, X_2, \ldots, X_{k-1}\right) = 0, \text{ d. h.}$$

$$\left[\frac{\partial \log \varphi(X_k, S_k, \Theta)}{\partial \Theta}\right]_{\Theta_0}$$

ist orthogonal zu allen Baire-Funktionen von $X_1, \ldots, X_{k-1}$, also auch zu

$$\left[\frac{\partial \log \varphi(X_i, S_i, \Theta)}{\partial \Theta}\right]_{\Theta_0}.$$

Satz 2: $\lim \frac{1}{n} \mathfrak{E}\left(\left[\frac{\partial \log L_n}{\partial \Theta}\right]^2_{\Theta_0}\right)$ existiert.

Beweis:

$$\frac{1}{n} \mathfrak{E}\left(\left[\frac{\partial \log L_n}{\partial \Theta}\right]^2_{\Theta_0}\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{E}\left(\left[\frac{\partial \log \varphi(X_i, S_i, \Theta)}{\partial \Theta}\right]^2_{\Theta_0}\right)$$

da wegen Satz 1 die Produkt-Glieder verschwinden. Wegen (iv) ist aber

$$\mathfrak{E}\left(\left[\frac{\partial \log \varphi(X_i, S_i, \Theta)}{\partial \Theta}\right]^2_{\Theta_0}\right) = -\mathfrak{E}\left(\left[\frac{\partial^2 \log \varphi(X_i, S_i, \Theta)}{\partial \Theta^2}\right]_{\Theta_0}\right) = -\mathfrak{E}(V_i).$$

Aus (ii) folgt

$$\mathfrak{E}(V_i) = \mathfrak{E}(\mathfrak{E}\langle V_i) \mid S_i\rangle) \to \int \left[\frac{\partial^2 \log \varphi(x, s_0, \Theta)}{\partial \Theta^2}\right]_{\Theta_0} \varphi(x, s_0, \Theta_0) \, dx =$$

$$= -\int \left[\frac{\partial \log \varphi}{\partial \Theta}\right]^2_{\Theta_0} \varphi_0 \, dx = -c.$$

Damit ist $\lim \frac{1}{n} \mathfrak{E}\left(\left[\frac{\partial \log L_n}{\partial \Theta}\right]^2_{\Theta_0}\right) = c.$

Satz 3: $\frac{1}{n}\left[\frac{\partial^2 \log L_n}{\partial \Theta^2}\right]_{\Theta_0} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} V_i \to -c$ (für $n \to \infty$).

Beweis: Sei $\tilde{V}_i = V_i - \mathfrak{E}(V_i \mid X_1, \ldots, X_{i-1})$. Dann ist $\mathfrak{E}(\tilde{V}_i \mid \tilde{V}_1, \tilde{V}_2, \ldots, \tilde{V}_{i-1}) = 0$ und $\mathfrak{E}(\tilde{V}_i^2) \leq 2\{\mathfrak{E}(V_i^2) + \mathfrak{E}(\mathfrak{E}^2(V_i \mid X_1, \ldots, X_{i-1}))\} \leq 4\,\mathfrak{E}(V_i^2) \leq 4\,A.$

Also gilt: $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \tilde{V}_i \to 0$ (siehe *Loève* [2] S. 387). Aus (ii) folgt

$$\mathfrak{E}(V_i \mid X_1, \ldots, X_{i-1}) \to -c.$$

Daher strebt

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} V_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \tilde{V}_i + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{E}(V_i \mid X_1, \ldots, X_{i-1})$$

mit Wahrscheinlichkeit 1 gegen $-c$.

Satz 4: $\left| \frac{1}{n} \frac{\partial^3 \log L_n}{\partial \Theta^3} \right| \leq 1+B$ für alle Θ einer Umgebung von Θ_0.

Beweis: Sei $H_i = H(X_i, S_i)$ und $\tilde{H}_i = H_i - \mathfrak{E}(H_i \mid X_1, \ldots, X_{i-1})$. Dann ist $\mathfrak{E}(\tilde{H}_i \mid \tilde{H}_1, \ldots, \tilde{H}_{i-1}) = 0$ und $\mathfrak{E}(\tilde{H}_i^2) \leq 2\{\mathfrak{E}(H_i^2) +$

$$+ \mathfrak{E}(\mathfrak{E}^2(H_i \mid X_1, \ldots, X_{i-1}))\} \leq 4\, \mathfrak{E}(H_i^2) \leq 4\, B.$$

Ferner ist wegen (iii) $\mathfrak{E}(H_i \mid X_1, \ldots, X_{i-1}) = \mathfrak{E}(H_i \mid S_i) \leq 1 + B$. Damit folgt:

$$\left| \frac{1}{n} \frac{\partial^3 \log L_n}{\partial \Theta^3} \right| \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial^3 \log \varphi(X_i, S_i, \Theta)}{\partial \Theta^3} \right| \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} H_i =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \tilde{H}_i + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{E}(H_i \mid X_1, \ldots, X_{i-1}).$$

Der erste Term strebt mit Wahrscheinlichkeit 1 gegen Null und der zweite Term bleibt kleiner oder gleich $1 + B$.

Satz 5: Sei $Z_n = \sqrt{n}(\hat{\Theta}_n - \Theta_0)$ und $Y_n = \frac{1}{c\sqrt{n}} \left[\frac{\partial \log L_n}{\partial \Theta} \right]_{\Theta_0}$

Dann gilt: $Y_n - Z_n \to 0$.

Beweis: Wir dividieren die *Taylor*-Entwicklung

$$0 = \left[\frac{\partial \log L_n}{\partial \Theta} \right]_{\hat{\Theta}_n} = \left[\frac{\partial \log L_n}{\partial \Theta} \right]_{\Theta_0} + \left[\frac{\partial^2 \log L_n}{\partial \Theta^2} \right]_{\Theta_0} (\hat{\Theta}_n - \Theta_0) +$$

$$+ \tfrac{1}{2} \left[\frac{\partial^3 \log L_n}{\partial \Theta^3} \right]_{\Theta'} (\hat{\Theta}_n - \Theta_0)^2$$

mit $c\sqrt{n}$. Dann erhält man:

$$Y_n = Z_n \left\{ - \frac{1}{c\,n} \left[\frac{\partial^2 \log L_n}{\partial \Theta^2} \right]_{\Theta_0} - \frac{1}{2\,c\,n} \left[\frac{\partial^3 \log L_n}{\partial \Theta^3} \right]_{\Theta'} (\hat{\Theta}_n - \Theta_0) \right\}$$

Wegen $\hat{\Theta}_n \to \Theta_0$, Satz 3 und Satz 4 folgt daraus die Behauptung.

Satz 6: $\mathfrak{E}(Y_n) = \frac{1}{c\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{E}\left(\left[\frac{\partial \log \varphi(X_i, S_i, \Theta)}{\partial \Theta} \right]_{\Theta_0} \right) = 0.$

Beweis: Wegen (iv) gilt für alle s die Gleichung

$$\mathfrak{E}\left(\left[\frac{\partial \log \varphi(X_i, S_i, \Theta)}{\partial \Theta}\right]_{\Theta_0} \mid S_i = s\right) = 0.$$

Satz 7: $\mathfrak{E}(Y_n^2) = \frac{1}{n c^2}\,\mathfrak{E}\left(\left[\frac{\partial \log L_n}{\partial \Theta}\right]_{\Theta_0}^2\right) \to 1/c.$

Dies wurde schon beim Beweise von Satz 2 gezeigt.

Satz 8: Die Verteilungsfunktion von Y_n strebt gegen die Normal-Verteilung.

Beweis: Es sei $W_k = \left[\frac{\partial \log \varphi(X_k, S_k, \Theta)}{\partial \Theta}\right]_{\Theta_0}$ und $W_{n,k} = \frac{W_k}{c\sqrt{n}}$.

Dann ist $Y_n = \sum_{n=1}^{n} W_{n,k}$. Wir definieren: $Y_n' = \sum_{n=1}^{n} W_{n,k}'$ mit $W_{n,k}' = \frac{W_k'}{c\sqrt{n}}$, wobei $W_k' = \left[\frac{\partial \log \varphi(X_k', s_0, \Theta)}{\partial \Theta_0}\right]_{\Theta_0}$ ist und die X_k' identisch und unabhängig von den X_k und von einander verteilt sind. Die Wahrscheinlichkeitsdichte der X_k' sei $\varphi(x, s_0, \Theta_0)$. Dann strebt die Verteilungsfunktion der Y_n' gegen die Normal-Verteilung. Wenn wir zeigen können, daß $\mathfrak{E}(\exp itY_n) - \mathfrak{E}(\exp itY_n') \to 0$ gilt, so ist der Satz 8 bewiesen. Es ist (für die erste Ungleichung sehe man *Loève* [2] S. 376):

$$|\,\mathfrak{E}(\exp itY_n) - \mathfrak{E}(\exp itY_n')\,| \leq \mathfrak{E}\Big(\sum_{k=1}^{n} |\,\mathfrak{E}(\exp itW_{n,k} \mid S_k) -$$

$$- \mathfrak{E}(\exp itW_{n,k})\,|\Big) = \mathfrak{E}\Big(\sum_{k=1}^{n} |\,1 - \frac{t^2}{2\,n\,c^2}\,\mathfrak{E}(W_n^2 \mid S_k) + o\,(1/n) - 1 +$$

$$+ \frac{t^2}{2\,n\,c^2}\,\mathfrak{E}(W_n'^2) - o(1/n)\,|\Big) \leq \frac{t^2}{2\,c^2}\,\mathfrak{E}\Big(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |\,\mathfrak{E}(W_k^2 \mid S_k) - \mathfrak{E}(W_k'^2)\,|\Big) +$$

$$+ o(1) \to 0,$$

da wegen (ii) und (iv)

$$\mathfrak{E}(W_n^2 \mid S_k) = -\,\mathfrak{E}(V_k \mid S_k) \to -\int \left[\frac{\partial^2 \log \varphi(x, s_0, \Theta)}{\partial \Theta^2}\right]_{\Theta_0} \varphi(x, s_0, \Theta_0)\,dx =$$

$$= \mathfrak{E}(W_n'^2)$$

gilt.

Satz 8, 5, 6 und 7 ergeben die Anfangs aufgestellte Behauptung.

Anmerkung: Die Voraussetzung $P(\hat{\Theta}_n \to \Theta_0) = 1$ kann nicht von § 1 übernommen werden. Doch läßt sich das in § 2 angewandte Verfahren leicht so wenden, daß man für eine Lösung $\hat{\Theta}_n$ der Gleichung $\frac{\partial \log L_n}{\partial \Theta} = 0$ die Beziehung $P(\hat{\Theta}_n \to \Theta_0) = 1$ zeigen kann (dabei

braucht man die Voraussetzung $P(S_n \to s_0) = 1$ nicht). Man vergleiche dazu *Cramèr* [1] und *Wald* [3].

Literatur

[1] *Cramér, H.* Mathematical Methods of Statistics, Princeton 1946.

[2] *Loève, M.* Probability Theory, New York 1955.

[3] *Wald, A.* Asymptotic properties of the maximum likelihood estimate of an unknown parameter of a discrete stochastic process. Annals of math. Stat. Vol XIX, 1948.

[4] *Wald, A.* Note on the consistency of the maximum likelihood estimate. Annals of math. Stat. Vol XX, 1949.

Some Relations between Bessel and Legendre Functions

By

J. C. Cooke, Singapore

(Received May 3, 1956)

Summary

Certain infinite integrals involving Bessel Functions are expressed in terms of Associated Legendre Functions in oblate and prolate spheroidal coordinates. Some expansions of Bessel Functions in series involving Legendre Functions are also given.

Introduction and Notation

The starting point is the relation

$$\int_0^\infty e^{-zt}\, t^{-\frac{1}{2}}\, J_m(\varrho t)\, J_{n+\frac{1}{2}}(ct)\, dt = \left(\frac{2}{\pi c}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(n+m+1)}{\Gamma(n-m+1)}\, P_n^{-m}(\mu)\, q_n^{-m}(\zeta), \tag{1}$$

proved by *Cooke* [2] in a slightly different form and notation, from a relation of *Bailey*. [1]. Here μ and ζ are oblate spheroidal coordinates defined by

$$z = c\,\mu\,\zeta,$$

$$\varrho = c\sqrt{\{(1-\mu^2)\,(1+\zeta^2)\}}.$$

μ is taken to be real and satisfies $-1 < \mu < 1$. ϱ and z are cylindrical coodinates.

We extend this result to other integrals involving the functions Y, K, I and H, and we also give some series connecting these functions. The notation is *Watson's* throughout. [7].

The main purpose of this paper is to prove some relations which, as well as being interesting in themselves, will be of use in some work which is proceeding in connection with certain boundary value problems,

involving dual integral equations, particularly when the medium is not infinite in all directions, but bounded by a cylinder or by two parallel planes.

We shall frequently refer to reference [3] which we shall denote by *B*.

We shall extend the notation due originally to *Nicholson* [6] in the form

$$p_n^m(\zeta) = e^{-\frac{1}{2}ni\pi} P_n^m(i\,\zeta), \tag{2}$$

$$q_n^m(\zeta) = e^{\frac{1}{2}(n+1)i\pi - im\pi} Q_n^m(i\,\zeta) \tag{3}$$

If ζ is real and positive $q_n^m(\zeta)$ is real when m and n are real, but $p_n^m(\zeta)$ is not unless $m+n$ is a positive integer, so that here the notation is not so useful. It will be noticed that the definition (3) is different from that given by *Cooke*. [2].

A neater form of equation (1) is

$$(\pi\, c/2)^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty e^{-zt}\, t^{-\frac{1}{2}}\, J_m(\varrho t)\, J_{n+\frac{1}{2}}(ct)\, dt = P_n^{-m}(\mu)\, q_n^m(\zeta), \tag{4}$$

which follows from equation (3) and *B*, 3.3 (2).

Simple restrictions on the variables will have to be imposed for convergence. These will not usually be given, but they can be written down without difficulty since the behaviour of the functions at the origin and at infinity is well-known. As already mentioned μ is always to be taken to be real, with $-1 < \mu < 1$, and z must be such that $R(z) > 0$.

Integrals Involving J, Y, and H

In equation (4) we replace m by $-m$ and use the formula

$$Y_m(z) = (\sin m\,\pi)^{-1}\{J_m(z)\cos m\,\pi - J_{-m}(z)\}. \tag{5}$$

We thus obtain

$$(\pi\, c/2)^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty e^{-zt}\, t^{-\frac{1}{2}}\, Y_m(\varrho t)\, J_{n+\frac{1}{2}}(ct)\, dt =$$

$$= (\sin m\,\pi)^{-1}\{P_n^{-m}(\mu)\, q_n^m(\zeta)\cos m\,\pi - P_n^m(\mu)\, q_n^{-m}(\zeta)\} =$$

$$= (\sin m\,\pi)^{-1}[P_n^{-m}(\mu)\, q_n^m(\zeta)\cos m\,\pi - \{\cos m\,\pi\, P_n^{-m}(\mu) +$$

$$+ (2/\pi)\sin m\,\pi\, Q_n^{-m}(\mu)\}\, q_n^m(\zeta)]$$

on making use of *B*, 3.4 (17) and *B*, 3.3 (2).

Hence we have

$$(\pi c/2)^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty e^{-zt} t^{-\frac{1}{2}} Y_m(\varrho t) J_{n+\frac{1}{2}}(ct)\, dt = -(2/\pi) Q_n^{-m}(\mu) q_n^m(\zeta). \qquad (6)$$

On combining together the results (4) and (6) we obtain

$$(\pi c/2)^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty e^{-zt} t^{-\frac{1}{2}} H_m^{(1)(2)}(\varrho t) J_{n+\frac{1}{2}}(ct)\, dt =$$
$$= q_n^m(\zeta) \{P_n^{-m}(\mu) \mp (2i/\pi) Q_n^{-m}(\mu)\} \qquad (7)$$

where the — and + signs go with $H^{(1)}$ and $H^{(2)}$ respectively.

Again in equation (4) we replace $n + \frac{1}{2}$ by $-n - \frac{1}{2}$ and use the formula

$$H_m^{(1)}(z) = (i \sin m\pi)^{-1} \{J_{-m}(z) - J_m(z) e^{-im\pi}\}.$$

This will give an integral involving $J_m H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}$ on the left hand side, and the right hand side is

$$\{i \sin (n + \tfrac{1}{2})\pi\}^{-1} \{P_{-n-1}^{-m}(\mu) q_{-n-1}^m(\zeta) - e^{-i(n+\frac{1}{2})\pi} P_n^{-m}(\mu) q_n^m(\zeta)\} =$$
$$= (i \cos n\pi)^{-1} e^{-(\frac{1}{2}n+m)i\pi} P_n^{-m}(\mu) \{Q_{-n-1}^m(i\zeta) - Q_n^m(i\zeta)\}$$

on making use of equation (3) and *B*, 3.4 (7).

Hence by *B*, 3.3 (9) we have

$$(\pi c/2)^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty e^{-zt} t^{-\frac{1}{2}} J_m(\varrho t) H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(ct)\, dt =$$
$$= -i\, \Gamma(n + m + 1)\, \Gamma(n - m)\, P_n^{-m}(\mu) p_n^{-m}(\zeta) =$$
$$= i \frac{\Gamma(n + m + 1)}{\Gamma(n - m + 1)} \frac{\pi e^{-\frac{1}{2}ni\pi}}{\sin (n - m)\pi} P_n^{-m}(\mu) P_n^{-m}(i\zeta), \qquad (8)$$

from equation (2) and *B*, 1.2 (6).

If we replace ζ by $e^{-i\pi}\zeta$ and c by $e^{i\pi}c$ we obtain

$$(\pi c/2)^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty e^{-zt} t^{-\frac{1}{2}} J_m(\varrho t) H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(ct)\, dt =$$
$$= -i \frac{\Gamma(n + m + 1)}{\Gamma(n - m + 1)} \frac{\pi e^{\frac{1}{2}ni\pi}}{\sin (n - m)\pi} P_n^{-m}(\mu) P_n^{-m}(-i\zeta). \qquad (9)$$

Subtracting equation (9) from equation (8) and dividing by $2i$ gives on the left hand side an integral involving $J_m Y_{n+\frac{1}{2}}$ and the right hand side is equal to

$$\frac{\Gamma(n+m+1)}{\Gamma(n-m+1)} P_n^{-m}(\mu) \{e^{-\frac{1}{2}ni\pi} P_n^{-m}(i\zeta) + e^{\frac{1}{2}ni\pi} P_n^{-m}(-i\zeta)\} \frac{\pi}{2 \sin (n-m)\pi}$$
$$= P_n^{-m}(\mu) \{e^{-\frac{1}{2}ni\pi} P_n^m(i\zeta) + e^{\frac{1}{2}ni\pi} P_n^m(-i\zeta)\} \frac{\pi}{2 \sin (n - m)\pi}$$

on making use of *B*, 3.3 (6), and so we have

$$(\pi c/2)^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty e^{-zt} t^{-\frac{1}{2}} J_m(\varrho t) Y_{n+\frac{1}{2}}(ct)\, dt = (\pi/2) P_n^{-m}(\mu) R_n^m(\zeta), \tag{10}$$

where

$$R_n^m(\zeta) = \{\sin(n-m)\pi\}^{-1} \{e^{-\frac{1}{2}ni\pi} P_n^m(i\zeta) + e^{\frac{1}{2}ni\pi} P_n^m(-i\zeta)\}, \tag{11}$$

which is real if ζ is real.

We note that

$$R_n^{-m}(\zeta) = \frac{\Gamma(-n-m)}{\Gamma(-n+m)} R_n^m(\zeta) \tag{12}$$

by *B*, 3.3 (6) and *B*, 1.2 (6).

Changing the sign of m in equation (10) and using equation (5) we have on the left hand side an integral involving $Y_m\, Y_{n+\frac{1}{2}}$ and on the right hand side

$$(\pi/2)(\sin m\pi)^{-1} \{P_n^{-m}(\mu) R_n^m(\zeta) \cos m\pi - P_n^m(\mu) R_n^{-m}(\zeta)\} =$$

$$= (\pi/2)(\sin m\pi)^{-1} R_n^m(\zeta) \{P_{-n-1}^{-m}(\mu) \cos m\pi - \frac{\Gamma(-n-m)}{\Gamma(-n+m)} P_{-n-1}^m(\mu)\}$$

by *B*, 3.4 (7) and equation (12).

Hence we have on using *B*, 3.4 (13)

$$(\pi c/2)^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty e^{-zt} t^{-\frac{1}{2}} Y_m(\varrho t) Y_{n+\frac{1}{2}}(ct)\, dt = Q_{-n-1}^{-m}(\mu) R_n^m(\zeta). \tag{13}$$

From equations (2), (4), (8) and (10) we deduce that

$$(\pi c/2)^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty e^{-zt} t^{-\frac{1}{2}} H_m^{(1)}(\varrho t) H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(ct)\, dt =$$

$$= P_n^{-m}(\mu) q_n^m(\zeta) - (2i/\pi) Q_n^{-m}(\mu) q_n^m(\zeta) + (i\pi/2) P_n^{-m}(\mu) R_n^m(\zeta) -$$

$$- Q_{-n-1}^{-m}(\mu) R_n^m(\zeta). \tag{14}$$

Integrals Involving I and K

In equations (7) we write $c\, e^{\pm\frac{1}{2}i\pi}$ instead of c and we obtain

$$(2c/\pi)^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty e^{\mp izt} t^{-\frac{1}{2}} K_m(\varrho t) I_{n+\frac{1}{2}}(ct)\, dt =$$

$$= e^{\mp\frac{1}{2}(n-m)i\pi} q_n^m(\zeta) \{P_n^{-m}(\mu) \mp (2i/\pi) Q_n^{-m}(\mu)\}. \tag{15}$$

Hence we have on adding and subtracting equations (15)

$$(2\,c/\pi)^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty \cos zt\, t^{-\frac{1}{2}}\, K_m(\varrho t)\, I_{n+\frac{1}{2}}(ct)\, dt =$$

$$= q_n^m(\zeta)\,\{\cos \tfrac{1}{2}(n-m)\,\pi\, P_n^{-m}(\mu) - (2/\pi)\sin \tfrac{1}{2}(n-m)\,\pi\, Q_n^{-m}(\mu)\}, \qquad (16)$$

and a similar expression involving sin zt.

Dealing similarly with equations (8) and (9) leads to

$$(2\,c/\pi)^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty e^{\mp ixt}\, t^{-\frac{1}{2}}\, I_m(\varrho t)\, K_{n+\frac{1}{2}}(ct)\, dt =$$

$$= -\frac{\Gamma(n+m+1)}{\Gamma(n-m+1)}\,\frac{\pi\, e^{\mp \frac{1}{2}mi\pi}}{\sin(n-m)\,\pi}\, P_n^{-m}(\mu)\, P_n^{-m}(\pm i\,\zeta). \qquad (17)$$

Hence we have

$$(2\,c/\pi)^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty \cos zt\, I_m(\varrho t)\, K_{n+\frac{1}{2}}(ct)\, dt =$$

$$= -\frac{\Gamma(n+m+1)}{\Gamma(n-m+1)}\,\frac{\pi}{2\sin(n-m)\,\pi}\, P_n^{-m}(\mu)\,\{e^{-\frac{1}{2}mi\pi}\, P_n^{-m}(i\zeta) +$$

$$+ e^{\frac{1}{2}mi\pi}\, P_n^{-m}(-i\,\zeta)\}, \qquad (18)$$

and a similar expression involving sin zt.

We note particularly from equations (4) and (16) that if we write $n = m + 2\,s$, where s is a positive integer or zero

$$(\pi/2) \int_0^\infty e^{-xt}\, t^{-\frac{1}{2}}\, J_m(\varrho t)\, J_{m+2s+\frac{1}{2}}(ct)\, dt$$

$$= (-1)^s \int_0^\infty \cos zt\, t^{-\frac{1}{2}}\, K_m(\varrho t)\, I_{m+2s+\frac{1}{2}}(ct)\, dt, \qquad (19)$$

and several other similar deductions may be made. These results may also be obtained by a double "increasing" and "decreasing the argument by $\frac{1}{2}\pi$" in the style of *Dixon* and *Ferrar*. [4].

Series for I and J

We shall use the formula for the *Gegenbauer* polynomial

$$C_n^\nu(z) = 2^{\nu-\frac{1}{2}}\,\Gamma(n+2\nu)\,\Gamma(\nu+\tfrac{1}{2})\,(z^2-1)^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\nu}\, P_{n+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\nu}(z)/\Gamma(2\nu)\,\Gamma(n+1), \qquad (20)$$

as given in *B*, 3.15 (4). If z is real and $-1 < z < 1$ we replace $z^2 - 1$ by $1 - z^2$.

Watson [7] gives the formula

$$\frac{J_{\nu-\frac{1}{2}}(z \sin \Phi \sin \Phi')}{(z \sin \Phi \sin \Phi')^{\nu-\frac{1}{2}}} \exp(i z \cos \Phi \cos \Phi') =$$

$$= \frac{2^{2\nu}\, \Gamma^2(\nu)}{\sqrt{(2\pi)}} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{i^s\, s!(\nu+s)}{\Gamma(2\nu+s)} \frac{J_{\nu+s}(z)}{z^\nu} C_s^\nu(\cos\Phi)\, C_s^\nu(\cos\Phi').$$

Put $\nu = m + \frac{1}{2}$, $\cos \Phi = \mu$, $\cos \Phi' = i\zeta$, $z = \lambda c$ and we have, using equation (20),

$$J_m(\varrho\, \lambda)\, e^{-\lambda z} = \frac{\pi}{\sqrt{(2\pi\lambda c)}} \Sigma (-1)^s \frac{(2m+1+2s)\, \Gamma(2m+1+s)}{\Gamma(s+1)} \times$$

$$\times J_{m+\frac{1}{2}+s}(\lambda c)\, P_{m+s}^{-m}(\mu)\, p_{m+s}^{-m}(\zeta). \qquad (21)$$

In a similar way by writing $z = \pm i\lambda c$ instead of $z = \lambda c$ we have

$$I_m(\lambda\varrho)\, e^{\pm i\lambda z} = \frac{\pi}{\sqrt{(2\pi\lambda c)}} \Sigma\, i^{2s\pm s} \frac{(2m+1+2s)\, \Gamma(2m+1+s)}{\Gamma(s+1)} \times$$

$$\times I_{m+\frac{1}{2}+s}(\lambda c)\, P_{m+s}^{-m}(\mu)\, p_{m+s}^{-m}(\zeta). \qquad (22)$$

Hence we have on adding

$$I_m(\lambda\varrho) \cos \lambda z = \frac{\pi}{\sqrt{(2\pi\lambda c)}} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{(2m+1+4s)\, \Gamma(2m+1+2s)}{\Gamma(2s+1)} \times$$

$$\times I_{m+\frac{1}{2}+2s}(\lambda c)\, P_{m+2s}^{-m}(\mu)\, p_{m+2s}^{-m}(\zeta), \qquad (23)$$

together with a similar formula for $I_m(\lambda\varrho) \sin \lambda z$ but with $2s$ and $4s$ on the right hand side replaced by $2s+1$ and $4s+2$ wherever they occur.

Some other simpler series deduced from another formula of *Watson*, namely

$$c^{z\cos\Theta} J_{\nu-\frac{1}{2}}(z \sin \Theta) = \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\frac{1}{2})} (2 \sin \Theta)^{\nu-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{\nu+n-\frac{1}{2}}}{I(2\nu+n)} C_n^\nu(\cos \Theta),$$

do not appear to have been noticed except in special cases. [5].

In this formula we write $\nu = m + \frac{1}{2}$, $z = rt$, and then put $rt \cos \Theta = tz$, $rt \sin \Theta = t\varrho$; we thus obtain

$$e^{tz} J_m(\varrho t) = (tr)^m \sum_{n=0}^{\infty} (tr)^n P_{m+n}^{-m}(\cos \Theta)/n!. \qquad (24)$$

Replacing t by it we have

$$e^{itz} I_m(\varrho t) = (tr)^m \sum_{n=0}^{\infty} i^n (tr)^n P_{m+n}^{-m}(\cos \Theta)/n!$$

and so

$$\cos tz\, I_m(\varrho t) = (tr)^m \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s (tr)^{2s} P_{m+2s}^{-m}(\cos\Theta)/(2s)!, \tag{25}$$

with a corresponding series for $\sin tz\, I_m(\varrho t)$.

These expressions may be regarded as generating functions for associated Legendre Functions of the first kind.

Prolate Spheroidal Coordinates

These coordinates are defined by the equations

$$z = c\mu\xi,$$

$$\varrho = c\sqrt{\{(1-\mu^2)(\xi^2-1)\}},$$

and so all our results may be expressed in these coordinates by writing $e^{\frac{1}{2}i\pi}\zeta = \xi$ and replacing c by $ce^{\frac{1}{2}i\pi}$. These leave z and ϱ unchanged.

We quote two examples only. We obtain immediately from these substitutions and equations (4) and (3)

$$(\pi c/2)^{\frac{1}{2}} \int_0^{\infty} e^{-zt} t^{-\frac{1}{2}} J_m(\varrho t)\, I_{n+\frac{1}{2}}(ct)\, dt = e^{-im\pi} P_n^{-m}(\mu)\, Q_n^m(\xi). \tag{26}$$

Similarly from the series (23) we deduce

$$I_m(\lambda\varrho)\cos\lambda z = \frac{\pi}{\sqrt{(2\pi\lambda c)}} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{(2m+1+4s)\,\Gamma(2m+1+2s)}{\Gamma(2s+1)} \times$$
$$\times J_{m+\frac{1}{2}+2s}(\lambda c) P_{m+2s}^{-m}(\mu)\, P_{m+2s}^{-m}(\xi). \tag{27}$$

References

[1] *Bailey, W. N.*, Proc. Lond. Math. Soc., **40** (1936), 37.

[2] *Cooke, J. C.*, Proc. Camb. Phil. Soc., **49** (1953), 162.

[3] *Erdelyi, A.* (ed), Higher Transcendental Functions. (New York, 1953). Bateman Manuscript Project.

[4] *Dixon, A. L.* and *Ferrar, W. L.*, Quart. Jour. Maths. (Oxford Series), **1** (1930), 122.

[5] *Knight, R. C.*, Quart. Jour. Maths. Oxford Series, **7** (1936), 126.

[6] *Nicholson, J. W.*, Phil. Trans. Roy. Soc. A, **224** (1924).

[7] *Watson, G. N.*, Theory of Bessel Functions (Cambridge, 1944).

A Third Order Differential Equation

By

W. R. Utz

(University of Missouri and Institute for Advanced Study)

(Received June 13, 1956)

This note is devoted to a proof of the following theorem.

Theorem. *Let $f(x)$ be a real differentiable function such that*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = c,\ 0 < c < \infty,$$

and such that $f'(x)$ is bounded as $x \to \infty$. Let $p(x)$ be a real differentiable function and let $a > 0$ be a real number such that

$$p(a) = 0,\ p'(a) > 0.$$

If $y = y(x)$ is a solution of

$$f(x)\, y''' - yy'' + p(y') = 0$$

valid for all large values of x and for which

$$\lim_{x\to\infty} y'(x) = a$$

then

$$y = ax + b,$$

where b is a constant.

It will be clear from the proof that the same theorem holds if $0 > c > -\infty$, and $a < 0$.

This theorem generalizes a theorem of G. H. Hardy [3] in which $f(x) = 1$, $p(y') = 2(y'^2 - 1)$, $a = 1$. Hardy's theorem was suggested by a paper of S. Goldstein [2] who uses the equation in his study of the boundary layer for a steady two-dimensional flow of a fluid of constant density and constant kinematic viscosity. The proof of the theorem of this note was suggested by the papers of Hardy and Goldstein.

The proof of the theorem is facilitated by the following lemma.

Lemma. *If $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$ are real functions such that for sufficiently large x,*

$$\alpha(x) > 0,\ \beta(x) < 0,\ \gamma(x) > 0,$$

and if $y = y(x)$ *is a solution of*

$$\alpha(x)\, y'' + \beta(x)\, y' + \gamma(x)\, y = 0$$

such that

$$\lim_{x \to \infty} y(x) = 0,$$

then $y(x)$ *is oscillatory or identically zero. That is,* $y(x)$ *has arbitrarily large zeros.*

Proof of the lemma. Suppose that $y \to 0$ as $x \to \infty$ and y is not oscillatory. Since y is not oscillatory, y is of fixed sign large x. Suppose $y > 0$ for x large. The proof when $y < 0$ is similar.

If $y' = 0$, then $y'' = -\gamma(x)\, y/\alpha(x)$ hence, for large x, $y' = 0$ implies $y'' < 0$ and all critical values of $y = y(x)$ are maxima, which is impossible. Thus $y' \neq 0$ for large x and y is, for large x, monotone.

Since $y > 0$ and $y \to 0$, y must be monotone decreasing and $y' < 0$. Now,

$$\alpha(x)\, y'' = -\beta(x)\, y' - \gamma(x)\, y$$

and, since $\alpha(x) > 0$, $\beta(x) < 0$, $y' < 0$, $\gamma(x) > 0$, $y > 0$ for large x, we have $y'' < 0$ for all large x. However, $y > 0$, $y \to 0$, $y' < 0$ and $y'' < 0$ for all large x is impossible and the lemma is proved.

Proof of the theorem. Let $x = u/a$ and $y = u + v$. Our equation becomes

$$a\left(\frac{u}{a}\right) \frac{d^3 v}{du^3} - (u + v)\, \frac{d^2 v}{du^2} + \frac{1}{a^2}\, p\left(a\left(1 + \frac{dv}{du}\right)\right) = 0.$$

We observe that $y' \to a$ when, and only when, $dv/du \to 0$. We have, replacing u by x and v by y, the equation

$$F(x)\, y''' - (x + y)\, y'' + P(y') = 0 \tag{1}$$

in which $F(x)$ is differentiable,

$$0 < \lim_{x \to \infty} F(x) < \infty,$$

$F'(x)$ is bounded as $x \to \infty$, $P(0) = 0$, $P'(0) > 0$. We wish to show that if y is a solution of (1) and $y' \to 0$ as $x \to \infty$, then y is a constant.

Upon setting $y' = w(x)$, (1) becomes

$$F(x)\, w'' - (x + y)\, w' + P(w) = 0. \tag{2}$$

Since $y' \to 0$, $y = o(x)$ hence $y = x\ .\ \epsilon\,(x)$, where

$$\lim_{x\to\infty} \epsilon(x) = 0.$$

Thus $x + y = x(1 + \epsilon) > 0$ for all large x. Set

$$Q(w) = \begin{cases} P(w)/w, & w \neq 0 \\ P'(0), & w = 0. \end{cases}$$

Since $P(0) = 0$, we have

$$\lim_{x\to\infty} Q(w(x)) = \lim_{w\to 0} Q(w) = P'(0) > 0$$

and so $Q(w) > 0$ for all large values of x.

By taking $\alpha(x) = F(x)$, $\beta(x) = -x(1 + \epsilon)$ and $\gamma(x) = Q(w(x))$ the hypotheses of the lemma are satisfied hence $w = y'$ is oscillatory.

Write $P(w) = wQ(w)$ and $x^2 = z$ in (2) to secure

$$w'' - R(z)\, w' + \frac{wQ(w)}{4\, zF(\sqrt{z})} = 0 \tag{3}$$

wherein differentiation is with respect to z and

$$R = \tfrac{1}{2}\left[\frac{1}{F(\sqrt{z})} + \frac{y}{\sqrt{z}\, F(\sqrt{z})} - \frac{1}{z}\right].$$

Now, let

$$w = Z\, e^{\frac{1}{2}\int R dz}$$

to secure

$$Z'' = S\, Z \tag{4}$$

wherein

$$S = \frac{R^2}{4} - \frac{R'}{2} - \frac{Q(w)}{4\, zF(\sqrt{z})}$$

and differentiation is with respect to z.

We intend to show that $\lim_{z\to\infty} S$ exists and is positive.

First we observe that since $y = o(x) = o(\sqrt{z})$,

$$\lim_{z\to\infty} R = \lim_{z\to\infty} \frac{1}{2\, F(\sqrt{z})} = \frac{1}{2\, ac} > 0$$

Now,

$$R' = \tfrac{1}{2}\left[-\frac{F'(\sqrt{z})}{F^2(\sqrt{z})} + \frac{y'}{\sqrt{z}\, F(\sqrt{z})} - \frac{y}{2\, z^{3/2}\, F(\sqrt{z})} - \frac{y\, F'(\sqrt{z})}{\sqrt{z}\, F^2(\sqrt{z})} + \frac{1}{z^2}\right]$$

where each prime denotes differentiation with respect to z. Since

$$F'(\sqrt{z}) = \frac{1}{2\sqrt{z}} \cdot \frac{dF(\sqrt{z})}{dx} \to 0 \text{ as } z \to \infty,$$

$$0 < \lim_{z\to\infty} F(\sqrt{z}) < \infty, \; y' = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{2\sqrt{z}} \to 0 \text{ and } y = o(\sqrt{z})$$

it follows that each term of R' has limit zero hence

$$\lim_{z\to\infty} R' = 0.$$

Finally, $z \to \infty$ implies $x \to \infty$ and $x \to \infty$ implies $w = y' \to 0$ hence

$$\lim_{z\to\infty} Q(w) > 0$$

and

$$\lim_{z\to\infty} \frac{Q(w)}{4\, zF(\sqrt{z})} = 0.$$

Thus

$$\lim_{z\to\infty} S = \frac{1}{16\, a^2\, c^2} > 0.$$

We now invoke a well known theorem [1, pp. 52, 53] to the effect that if

$$\lim_{z\to\infty} S > 0,$$

then any solution of (4) is identically zero or eventually of fixed sign. Hence, since w cannot be of fixed sign by our lemma, $w \equiv 0$. However, $w = y' \equiv 0$ implies y is *a* constant to complete the proof of the theorem[1].

References

1. *M. Bocher*, Leçons sur les méthodes de Sturm (Paris, 1917).

2. *S. Goldstein*, "A note on the boundary layer equations", Proc. Cambridge Philos. Society, **35** (1939), 338—340.

3. *G. H. Hardy*, "A note on a differential equation", Proc. Cambridge Philos. Society **35** (1939), 652—653.

[1] This research was supported by the United States Air Force through the Office of Scientific Research of the Air Research and Development Command.

Ein Biegungsproblem mit negativer Charakteristik

Von

E. Rembs, Berlin

(Eingelangt am 20. Juni 1956)

In der Arbeit [1] in den Wiener Monatsheften habe ich die Randvorgaben von δk, δa und $\delta\varphi$ berücksichtigt. Sie ließen sich mit der Drehvektormethode behandeln. Für alle drei Größen gibt es nämlich eine Darstellung als Skalarprodukt der Ableitung des Drehvektors $\mathfrak{y}$ nach der Bogenlänge der Randkurve mit einem Grundvektor dieser Kurve. Auf der Suche nach anderen Randwertproblemen, die eine ähnliche Behandlung zulassen, ergibt sich, daß solche Aufgaben, in die nicht der Drehvektor $\mathfrak{y}$, sondern der Zusatz- oder Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{z}$ der infinitesimalen Verbiegung eingeht, auf jene Art nicht ohne weiteres zu erfassen sind. *Minagawa* und *Rado* haben nun für solche Probleme eine Methode angegeben, die außerdem den Vorzug hat, daß von $\mathfrak{z}$ nur die einmalige Differenzierbarkeit gefordert wird [2]. Das ist ein Vorzug allerdings nur so lange, als man nicht solche Vorgaben wie z. B. δk behandelt, bei denen durch die Art der Aufgabe schon eine höhere Differenzierbarkeit benötigt wird. Ist $\mathfrak{x}(u, v)$ der Ortsvektor der zu verbiegenden Fläche, $\mathfrak{x} \to \mathfrak{x} + t\mathfrak{z}$ also die infinitesimale Verbiegung, so führen wir zur Bestimmung von $\mathfrak{z}$ die drei Hilfsfunktionen ein

$$a = (\mathfrak{z}\, \mathfrak{x}_u),\ b = (\mathfrak{z}\, \mathfrak{x}_v),\ \ c = (\mathfrak{z}\, \mathfrak{x}).$$

Benutzt man die Gleichung $(d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{z}) = 0$, die besagt, daß es sich um eine infinitesimale Verbiegung handelt, und die *Gauß*schen Ableitungsgleichungen, so findet man, daß a, b, c Lösungen des folgenden Gleichungssystems sein müssen

$$(*) \qquad \begin{aligned} a_u &= \left\{{11 \atop 1}\right\} a + \left\{{11 \atop 2}\right\} b + L\, c, \\ b_v &= \left\{{22 \atop 1}\right\} a + \left\{{22 \atop 2}\right\} b + N\, c, \\ a_v + b_u &= 2\left\{{12 \atop 1}\right\} a + 2\left\{{12 \atop 2}\right\} b + 2\, M\, c^{1}. \end{aligned}$$

[1] Diese Gleichungen finden sich übrigens schon in der Arbeit [3] von *Jonas*.

Um auch hier die Theorie eines Systems von zwei linearen partiellen elliptischen Differentialgleichungen anwenden zu können, beziehe man die konvexe Fläche auf ein isotherm-konjugiertes System mit $L=N$, $M=0$. Dadurch erhält man die zwei Gleichungen für a und b allein

$$a_u - b_v = (\{^{11}_{1}\} - \{^{22}_{1}\})\, a + (\{^{11}_{2}\} - \{^{22}_{2}\})\, b,$$
$$a_v + b_u = 2\{^{12}_{1}\}\, a + 2\{^{12}_{2}\}\, b.$$

Jetzt handelt es sich darum, noch eine passende Randbedingung anzugeben. Als nächstliegende bietet sich die folgende an:

Die infinitesimale Verbiegung soll so erfolgen, daß überall die Randpunkte senkrecht zum Rand verschoben werden, d. i.: am ganzen Rand soll gelten

$$(\mathfrak{z}\ \mathfrak{x}') = 0.$$

Da für die isometrische Deformation des Randes $(\mathfrak{z}'\ \mathfrak{x}') = 0$ ist, folgt durch Differenzieren

$$(\mathfrak{z}\ \mathfrak{x}'') = 0.$$

D. h. die Verschiebung der Randpunkte muß auch senkrecht zur Hauptnormale, also $\mathfrak{z}$ kollinear zur Binormale sein. Die Randbedingung $(\mathfrak{z}\ \mathfrak{x}') = 0$ ergibt aber für die Funktionen a und b die Bedingung

$$a\,u' + b\,v' = 0$$

oder

$$a \sin\vartheta - b\cos\vartheta = 0,$$

wenn ϑ der Winkel der Normalen der Randkurve Γ in der Parameterebene mit der u-Achse ist. Dieses Randwertproblem hat die Charakteristik -1 (vgl. [4]). Daher folgt: es ist auf unendlich viele Arten lösbar. Man kann die Lösung bis auf einen konstanten Faktor eindeutig machen, indem man eine Stelle im Innern vorschreibt, an der a und b beide verschwinden sollen. Geometrisch bedeutet das, daß dort $\mathfrak{z}$ in die Flächennormale fällt. Es gilt daher der Satz:

Es gibt bis auf einen konstanten Faktor genau eine infinitesimale Verbiegung einer konvexen Fläche mit nichtebenem Rand, bei der alle Randpunkte sich senkrecht zur Randkurve verschieben und ein beliebiger Punkt im Innern eine Verschiebung senkrecht zur Fläche erfährt. Die Verschiebung der Randpunkte muß dann senkrecht zur Schmiegebene der Randkurve sein.

Nach Bestimmung von a und b erhält man c aus einer der beiden ersten Gleichungen des Systems (*). Damit ist aber $\mathfrak{z}$ bekannt. Natürlich kann man den Satz auch folgendermaßen aussprechen: *Es gibt im*

wesentlichen eine infinitesimale Verbiegung einer konvexen Fläche mit nichtebenem Rand, bei der irgendein Punkt im Inneren samt seiner Tangentialebene und den Flächenrichtungen in ihm festbleiben und die Verschiebung der Randpunkte sich zusammensetzt aus einer solchen senkrecht zur Schmiegebene der Randkurve und einer zusätzlichen infinitesimalen Bewegung der Randkurve als Ganzes.

Die Bedingung, daß der Rand nichteben sein soll, in diesen Sätzen bedarf aber noch einer Erklärung: Nach der Theorie sind die Lösungspaare a, b Linearkombinationen von drei unabhängigen a_i, b_i $(i = 1, 2, 3)$[2]. Demnach sind auch die $\mathfrak{z}$ Linearkombinationen von drei unabhängigen $\mathfrak{z}_i$. Daraus folgt aber, daß im Fall einer ebenen Randkurve die „Verbiegungen" nur infinitesimale Bewegungen sind. Es gibt nämlich drei unabhängige infinitesimale Bewegungen einer ebenen Kurve, bei denen alle Punkte senkrecht zur Kurve verschoben werden, nämlich Schiebung senkrecht zur Kurvenebene und Drehungen um zwei sich schneidende Achsen in dieser Ebene[3]. Die „Verbiegungen" sind also hier mit den Linearkombinationen dieser drei Bewegungen identisch. *Damit ist die Starrheit einer konvexen Kalotte mit ebenem Rand bei der vorgeschriebenen Randbedingung bewiesen*[4]. Anders liegen die Verhältnisse, wenn der Rand eine Raumkurve ist, denn kein noch so kleines Stück einer Raumkurve kann infinitesimal so bewegt werden, daß sich alle Punkte senkrecht zur Schmiegebene bewegen. In diesem Falle handelt es sich in dem Satz also um *echte Verbiegungen*. Es können nämlich auch nicht in einer Lösung alle Werte von $\mathfrak{z}$ am Rande verschwinden. Denn $\mathfrak{z} = 0$ am Rande bedeutet, daß der Rand nicht nur starr sondern auch im Raum fest ist. Man hätte aber dann für das ganze Innere $\mathfrak{z} \equiv 0$; und dann müßten a, b, c zugleich identisch verschwinden. Der Fall $\mathfrak{z} = 0$ am Rande entspricht also keinem der drei linear unabhängigen Lösungspaare a_i, b_i. Dies ist wohl der erste Fall eines Verbiegungsproblems im Großen, bei dem die Verbiegbarkeit davon abhängt, ob die Raumkurve eben ist oder nicht.

Bemerkung: Auch die Vorgabe von $(\mathfrak{z}\ \eta)$ hat die Charakteristik -1. Es ist nämlich $-(\mathfrak{z}\ \eta) = (\mathfrak{z}\ \mathfrak{x}'\ \xi) = (EG - F^2)^{-1/2}\ (\mathfrak{z} \times \mathfrak{x}')\ (\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v)$

---

[2] Gerade dadurch ist es möglich, den ausgezeichneten Punkt im Innern beliebig vorzuschreiben.

[3] D. h., wenn die Kurve in der 1, 2-Ebene liegt, etwa $\mathfrak{z}_1 = (0, 0, 1)$, $\mathfrak{z}_2 = (x_3, 0, -x_1)$, $\mathfrak{z}_3 = (0, -x_3, x_2)$ mit $x_3 = 0$ für die Punkte der Ebene selbst.

[4] Die Starrheit kann auch direkt bewiesen werden: Aus $(\mathfrak{z}\ \mathfrak{x}')$ und $(\mathfrak{z}\ \mathfrak{x}'') = 0$ folgt $(\mathfrak{z}'\ \mathfrak{x}'') = 0$ wegen $\mathfrak{x}''' = \alpha\,\mathfrak{x}' + \beta\,\mathfrak{x}''$, daher $(\mathfrak{y}\ \mathfrak{x}'\ \mathfrak{x}'') = 0$ und $(\mathfrak{y}\mathfrak{b}) = (\mathfrak{y}'\mathfrak{b}) = \delta k = 0$ (vgl. die Arbeit [1]).

und daher nach der „Bemerkung" zur Arbeit [1] (Monatshefte **60**, Heft 2) gleich $(EG—F^2)^{-½}\,((\mathfrak{x}'\,\mathfrak{x}_u)^2+(\mathfrak{x}'\,\mathfrak{x}_v)^2)^{½}\,(a\cos\omega+b\sin\omega)$. Bei der Randbedingung $(\mathfrak{z}\;\eta)=0$ gibt es also auch unendlich viele Verbiegungen. Dasselbe trifft für $(\mathfrak{z}\;\xi\xi')=0$ zu. ($\xi\times\xi'$ hat die zu $\mathfrak{x}'$ konjugierte Richtung.) Die Bedingung führt bei $L=N$, $M=0$ ähnlich wie vorhin zu $a\cos\vartheta+b\sin\vartheta=0$. Auf die Ausnahmefälle bei beiden Aufgaben wird bei späterer Gelegenheit zurückzukommen sein.

Literatur

[1] *Rembs, E.*: Randvorgaben bei infinitesimaler Verbiegung einfach zusammenhängender konvexer Flächen. Monatshefte für Mathematik **60** (1956) 57—65 und Bemerkung hiezu **60** (1956) 212—213.

[2] *Minagawa, T.* und *Rado, T.*: On the infinitesimal rigidity of surfaces. Osaka math. J. **4** (1952) 241—285.

[3] *Jonas, H.*: Über die Konstruktion der W-Kongruenzen zu einem gegebenen Brennflächenmantel und über die Transformation der R-Flächen. Jber. D. M. V. **29** (1920) 40—74.

[4] *Haack, W.*: Randwertprobleme höherer Charakteristik für ein System von zwei elliptischen Differentialgleichungen. Math. Nachrichten **8** (1952) 123—132.

Buchbesprechungen

Gesammelte mathematische Schriften von Constantin Carathéodory. Band III. IX, 464 S. München: C. H. Beck'sche Verlagsbuchhandlung. 1955.

Die schöne Ausgabe der Werke von *Carathéodory* schreitet rüstig vorwärts; der nun vorliegende dritte Band enthält 27 Arbeiten zur Funktionentheorie, die sich abgesehen von einer Ausnahme mit Funktionen einer Veränderlichen beschäftigen. Sie sind in die 5 Gruppen: Picardsches Problem, Koeffizientenprobleme, Schwarz'sches Lemma, Existenztheoreme der konformen Abbildung, Konforme Abbildung veränderlicher Gebiete eingeteilt. Wenn man diese Fülle von gedankenreichen Arbeiten so bequem überblicken kann, wie es durch die Gesamtausgabe ermöglicht ist, wächst die Gestalt *Carathéodorys* erst zu den ihr zukommenden gewaltigen Dimensionen, und man ist den Herausgebern für ihre eingehende und mühevolle Arbeit doppelt dankbar. *J. Radon*, Wien

Gregorio Ricci-Curbastro: Opere. Vol. I: Note e memorie. XI, 441 S. Roma: Edizioni Cremonese. 1956.

Schon seit längerer Zeit befaßt sich die Unione Matematica Italiana damit, die gesammelten Werke der großen italienischen Mathematiker herauszugeben, und nunmehr liegt also auch der erste Band der Werke von *G. Ricci-Curbastro* vor. Er enthält fast alle bis zum Jahre 1895 veröffentlichten Arbeiten des 1925 verstorbenen Altmeisters. Der Großteil dieser Arbeiten hat die Entwicklung und Anwendung des Tensorkalküls zum Gegenstand, welche ja *Riccis* Hauptleistung bildet. An den Beginn des Bandes wurde der von *T. Levi-Civita* im Jahre 1926 gehaltene Nachruf auf *Ricci* gestellt. *W. Nöbauer*, Wien

Gesammelte Mathematische Abhandlungen. Von *L. Schläfli.* Herausgegeben vom Steiner-Schläfli-Komitee der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft. Band III. 402 S. Basel: Verlag Birkhäuser. 1956. sfr. 59. 30.

Der dritte und letzte Band enthält 29 Abhandlungen des Autors aus den Jahren 1866—1885. Darin sind die bedeutungsvollen funktionentheoretischen Arbeiten über Zylinderfunktionen, Kugelfunktionen, Lamésche Funktionen, Modularfunktionen und Abelsche Funktionen. Ihre Ergebnisse gehören heute zum klassischen Bestand der Funktionentheorie. Im dritten Band finden sich ferner Arbeiten zur Differentialgeometrie, und zwar über dreifach orthogonale Flächensysteme und über Räume konstanter Gaußscher Krümmung. Ferner enthält der Band noch Arbeiten vermischten Inhalts wie über das sphärische Pendel, über partielle Differentialgleichungen, über n-fache Integrale und eine philosophisch-mathematische Arbeit über das Raumproblem. Den Arbeiten sind meist erläuternde Nachworte beigegeben. *N. Hofreiter*, Wien

Selecta Hermann Weyl. Herausgegeben zu seinem siebzigsten Geburtstag von der Eidgenössischen Technischen Hochschule in Zürich und vom Institute for Advanced Study in Princeton. 592 S. Basel-Stuttgart: Birkhäuser-Verlag. 1956. sfr. 48.90.

Zum 70. Geburtstag von *Hermann Weyl* wurde auf Wunsch zahlreicher Freunde, Schüler und Kollegen dieser Band mit den schönsten Arbeiten *Weyls* herausgegeben, welche gleichzeitig einen Querschnitt durch das Schaffen des bedeutenden Mathematikers geben, dem fast alle Teile der Mathematik so außerordentlich hervorragende Beiträge verdanken. Leider sollte *Hermann Weyl* das Erscheinen des Bandes nicht mehr erleben — er starb am 8. Dezember 1955 — und so ist aus dem Geburtstagsgeschenk durch die Ungunst des Schicksals ein Erinnerungsband geworden. Die Herausgabe wurde von *B. Eckmann, H. Hopf, M. Plancherel* in Zürich und *M. Morse, J. v. Neumann, A. Selberg* in Princeton besorgt und durch die finanzielle Hilfe der im Titel genannten Institute ermöglicht. Es wurden folgende 19 Arbeiten ausgewählt: Über gewöhnliche Differentialgleichungen mit Singularitäten und die zugehörigen Entwicklungen willkürlicher Funktionen; Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenschwingungen eines beliebig gestalteten elastischen Körpers; Über die Gleichverteilung von Zahlen mod Eins; Über die Bestimmung einer geschlossenen konvexen Fläche durch ihr Linienelement; Gravitation und Elektrizität. Ausbreitung elektromagnetischer Wellen über einem ebenen Leiter; Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik; Zur Infinitesimalgeometrie: Einordnung der projektiven und konformen Auffassung; Theorie der Darstellung kontinuierlicher halb-einfacher Gruppen durch lineare Transformationen (I, II, III); Integralgleichungen und fastperiodische Funktionen; Die Vollständigkeit der primitiven Darstellungen einer geschlossenen kontinuierlichen Gruppe; Über das Pick-Nevanlinnasche Interpolationsproblem und sein infinitesimales Analogon; Spinors in n-Dimensions; The Method of Orthogonal Projection in Potential Theory; On the Differential Equation of the Simplest Boundary-Layer Problem; On Hodge's Theory of Harmonic Integrals; Fundamental Domains for Lattice Groups in Division Algebras (I, II); Elementary Algebraic Treatment of the Quantum Mechanical Symmetry Problem; Die natürlichen Randwertaufgaben im Außenraum für Strahlungsfelder beliebiger Dimension und beliebigen Ranges. Außer diesen Abhandlungen enthält der Band noch ein Bild von *Weyl* und ein Gesamtverzeichnis seiner Arbeiten.

Mit Recht waren die Herausgeber überzeugt, „daß die mathematische Welt einen solchen Rückblick auf *Weyls* überragendes wissenschaftliches Werk mit großem Interesse begrüßen und als reiche Quelle von Anregungen schätzen werde."

K. Prachar, Wien

Symmetrie. Von *H. Weyl.* (Wissenschaft und Kultur: Band 11.) Mit 72 Textabb., 157 S. Basel-Stuttgart: Birkhäuser-Verlag. 1955. sfr. 17.70.

Dieses Buch — eine Übersetzung aus dem Englischen — ist die Wiedergabe von Vorträgen, welche von *Weyl* im Jahre 1951 an der Universität Princeton gehalten wurden. Der Verfasser geht aus von der Bedeutung des Wortes „Symmetrie" im weitesten Sinn: Symmetrie ist eine Idee, mit deren Hilfe der Mensch seit jeher versucht hat, Ordnung, Schönheit und Vollkommenheit zu begreifen — in der ihn umgebenden Natur — oder selbst zu schaffen — in der Kunst. Ziel der Ausführungen ist, den mathematischen Leitgedanken herauszuschälen, der dieser Idee zugrunde liegt. In stufenweisem Aufstieg, vom einfachsten Fall der bilateralen Symmetrie ausgehend und zu immer komplizierteren Arten von Symmetrie fortschreitend, wird dieser Leitgedanke schließlich in voller Allgemeinheit erkannt: Symmetrie liegt immer dann vor, wenn ein Gebilde invariant ist gegenüber einer Gruppe von Automorphismen. Für jede der behandelten Arten von Symmetrie wird das mathematische Gerüst entwickelt,

ohne daß näher auf Einzelheiten eingegangen wird, jede wird aber auch durch zahlreiche, sehr interessante Beispiele aus Physik, Biologie und Kunst erläutert. Ein mathematischer Anhang enthält die exakte Ableitung aller endlichen, eigentlichen und uneigentlichen dreidimensionalen Drehgruppen.

Das mit vielen, teilweise ganz prachtvollen Abbildungen geschmückte Buch wendet sich keineswegs nur an den Fachmathematiker allein, sondern kann von jedem gelesen werden, der einigermaßen mit mathematischen Gedankengängen vertraut ist. Es ist ein eindrucksvoller Beweis für die Gedankenfülle des großen Mathematikers *Weyl*, der es selbst als seinen „Schwanengesang" bezeichnet hat. *W. Nöbauer*, Wien

Elemente der Zahlentheorie. Von *I. M. Winogradow*. Übersetzt aus dem in sechster Auflage erschienenen russischen Originalwerk. VIII, 156 S. München: R. Oldenbourg. 1956. DM 10.50.

Das Buch gibt eine systematische Darstellung der Elemente der Zahlentheorie. Es enthält die Teilbarkeitslehre, zahlentheoretische Funktionen, Kongruenzen, quadratische Reste und Primitivwurzeln. Zu jedem Kapitel werden Zahlenbeispiele gegeben, deren Lösungen am Ende des Buches angegeben werden. Zum Unterschied von allen anderen Lehrbüchern der Zahlentheorie enthält das Buch eine sehr große Anzahl von Aufgaben. Die Stellung und Lösung der Aufgaben macht mehr als die Hälfte des Buches aus. Die Aufgaben sind meist Beweise und gehen weit über den Rahmen der elementaren Zahlentheorie hinaus. Sie führen den Leser in neue zahlentheoretische Ideenkreise ein. Natürlich gehören viele Aufgaben auch der elementaren Zahlentheorie an, aber viele bringen interessante Sätze über diophantische Gleichungen, diophantische Approximationen und aus der analytischen Zahlentheorie. Die Lösungen der Aufgaben sind natürlich knapp gehalten. Wer eine Einführung in die Zahlentheorie bekommen will, lese das Buch ohne Aufgaben. Wer aber weiter in die Zahlentheorie, besonders in die analytische Zahlentheorie eindringen will, der löse auch die Aufgaben. Die angewandte Mühe macht sich bezahlt. Das Buch bringt zuletzt Tafeln der Indizes für die Primzahlen unter 100, ferner Tafeln der Primzahlen unter 4000 und ihrer kleinsten Primitivwurzeln. *N. Hofreiter*, Wien

Additive Zahlentheorie. Von *H.-H. Ostmann*. Zweiter Teil: Spezielle Zahlenmengen. (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Neue Folge: Heft 11.) VI, 136 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1956. DM 22.—.

Der vorliegende zweite Teil dieses gründlichen Berichtes über den heutigen Stand der additiven Zahlentheorie behandelt die Darstellung natürlicher Zahlen als Summen von Zahlen spezieller Zahlenmengen, z. B. als Summe von k-ten Potenzen, quadratfreien Zahlen, Primzahlen usw. Insbesondere finden sich hier die Resultate über das *Waring*sche und *Goldbach*sche Problem sowie über die *Fermat*sche Vermutung; ferner eine ungeheure Anzahl von speziellen Problemen, auf deren Aufzählung wir gegen der Vielfältigkeit der Resultate nicht eingehen können. Erwähnt sei noch, daß in dem Bericht auch viele Dinge enthalten sind, die nicht unmittelbar zur additiven Zahlentheorie gehören. So z. B. findet man eine Skizze des analytischen und des elementaren Beweises für den Primzahlsatz, eine Aufzählung der im Restglied des Primzahlsatzes erreichten Verbesserungen sowie die analogen Resultate für die Primzahlen einer arithmetischen Reihe. Sehr schön ist die kurze Darstellung der idealtheoretischen Methoden bei der Behandlung des *Fermat*-Problems.

Der Verfasser hat sich mit diesem Werk einer Arbeit unterzogen, welche gar nicht hoch genug eingeschätzt werden kann. Sind doch gerade die hier zusammengestellten Ergebnisse in allen möglichen Zeitschriften verstreut und auch in weit auseinanderliegenden Zeitabschnitten gefunden worden. Das Erscheinen dieses Berichtes wird dem Lernenden einen leichten Weg zu einem Gebiet vermitteln, welches früher nur sehr schwer zugänglich war und auch dem auf diesem Gebiet Arbeitenden den Überblick ermöglichen, den er so nötig hatte. Schließlich wird das Buch zweifellos eine starke Anregung zur Bearbeitung der vielen noch ungelösten Probleme mit sich bringen. (Das Literaturverzeichnis umfaßt 28 Seiten.) *K. Prachar*, Wien

Colloque sur la Théorie des Nombres. Herausgegeben vom Centre Belge de Recherches Mathématiques. 208 S. Liège: G. Thone, Éditeur. — Paris: Masson et Cie. 1956. ffr. 2400.—.

Nach einer Reihe von Kolloquien über Geometrie und Analysis fand im Dezember 1955 ein Kolloquium über Zahlentheorie statt. Das Buch enthält Auszüge von 13 Vorträgen, die teils referierend gehalten sind, teils ausführliche Beweise darstellen. Ich gebe die Titel in freier Übersetzung an: *Ch. de la Vallée Pousin:* Über die Riemannsche Zetafunktion, *L. J. Mordell:* Über die diophantische Gleichung $x^3 + y^3 + z^3 + kxyz = 0$, *Ch. Pisot:* Über eine bemerkenswerte Familie von ganzen algebraischen Zahlen, *H. E. Richert:* Summierbarkeit Dirichletscher Reihen und asymptotische Zahlentheorie, *G. Ricci:* Über die Folge $(p_{n+1} - p_n) \log p_n$, *J. Popkin:* Über transzendente Zahlen. *A. Errera:* Über den Primzahlsatz, *K. F. Roth:* Über die Approximation von algebraischen Zahlen, *P. Erdös:* Probleme und Ergebnisse in der additiven Zahlentheorie, *H. Davenport:* Über die Bedeckung des Raumes durch Kugeln, *H. Delange:* Über die Werteverteilung von gewissen zahlentheoretischen Funktionen, *J. G. van der Corput:* Über den elementaren Beweis des Primzahlsatzes, *J. Teghem:* Über trigonometrische Summen. *N. Hofreiter*, Wien

Einführung in die höhere Mathematik mit besonderer Berücksichtigung ihrer Anwendungen auf Geometrie, Physik, Naturwissenschaften und Technik. Von *K. Strubecker*. Band I: Grundlehren. Mit 338 Textabb., XV, 821 S. München: R. Oldenbourg. 1956. DM 36.—.

Viele werden sagen: Schon wieder ein Lehrbuch, das eine Einführung in die höhere Mathematik darstellt. Das ist doch überflüssig, da es schon viele und wirklich gute Lehrbücher gibt. Wir geben zu: Es ist ein Lehrbuch, also ein Buch, das für Studierende geschrieben ist. Die Darstellung ist breit und verständlich, zunächst anschaulich, dann streng. Das Buch ist für den Studierenden ein verständlicher und sicherer Führer. Was das Buch aber besonders auszeichnet, das ist die Vielseitigkeit. Es enthält die Grundlagen der Differential- und Integralrechnung, aber auch Zahlentheorie, Algebra, analytische und projektive Geometrie und praktische Mathematik. Es bringt viele Beispiele mit Anwendungen auf Geometrie, Physik, Astronomie, Chemie und Technik. Der Studierende lernt den Wert und die Bedeutung der höheren Mathematik für alle Art von exakter Naturwissenschaft kennen. Reizvoll ist der stete Wechsel, wenn etwa die Intervallschachtelung unmittelbar nach den programmgesteuerten Rechenautomaten kommt. Wohl kein Lehrbuch bringt Anwendungen der Zahlentheorie auf die Zeitrechnung, auf Sonnen- und Mondfinsternis und auf die Balmersche Formel für das Wasserstoffspektrum. In keinem Lehrbuch der Analysis findet sich eine solche Fülle von Konstruktionsaufgaben. Belehrend sind auch die vielen historischen Bemerkungen. Der Leser erkennt den Wert der Anschauung als intuitives

Element der Mathematik. Er lernt aber auch, daß die Anschauung versagen kann und daß die Sätze der Mathematik ohne Rückgriff auf die Anschauung durch strenge logische Gedankengänge abgeleitet werden müssen. Man kann den jungen Hochschülern nur wärmstens empfehlen, das Buch durchzustudieren. Sie werden das Buch verstehen und sich damit grundlegende Kenntnisse auf vielen Gebieten der Mathematik erwerben. Es bewahrt sie, nur die reine Mathematik kennen zu lernen, oder nur jene Teile der Mathematik, die die Ingenieure unbedingt brauchen. *N. Hofreiter*, Wien

Höhere Mathematik für Mathematiker, Physiker, Ingenieure. Von *R. Rothe*. Teil VII. Von *W. Schmeidler*. (Teubners mathematische Leitfäden: Band 47.) Mit 43 Textabb., 218 S. Stuttgart: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft. 1956. DM 19.80.

Mit Band VII wird die Höhere Mathematik von *R. Rothe* weitergeführt — im wesentlichen sind es: Potentialtheorie, Integralgleichungen und Variationsrechnung. Das Erscheinen dieses Bandes ist durchaus zu begrüßen, um dem in der Forschung tätigen Physiker und Ingenieur die notwendigen mathematischen Grundlagen zu geben. Das erste Kapitel behandelt harmonische und analytische Funktionen. Es werden die Potentialgleichung in der Ebene und im Raum und die Eigenschaften ihrer Lösungen betrachtet. Dazu gehören auch Randwertaufgaben und konforme Abbildung von Potentialströmungen. Zwei Paragraphen bringen elliptische Integrale und elliptische Funktionen. Während die Auflösung von linearen Gleichungssystemen im Band II mit Determinanten erfolgte, werden hier die determinantenfreien Tatsachen über lineare Gleichungssysteme besprochen. Gerade diese lassen sich auf Integralgleichungen übertragen. Es folgen Existenzsätze über Integralgleichungen erster und zweiter Art und Anwendungen auf Randwertaufgaben. Kap. III handelt von der Variationsrechnung. Dazu gehört natürlich die Eulersche Gleichung, aber auch die Weierstraßsche Theorie. Als Anwendung auf Geometrie und Physik werden Probleme der Flächentheorie und die Jacobi-Hamiltonsche Theorie gebracht. Am Ende jedes Kapitels stehen mehrere Aufgaben, die der Mathematik, der Physik und der Technik entnommen sind. Die Lösungen werden kurz auseinandergesetzt. Das Buch schließt mit dem Satz: „Die Mathematik bleibt in jedem Stadium unserer Welterkenntnis von entscheidender Bedeutung, die Verfolgung ihrer Entwicklung und Weiterbildung eine fundamentale Aufgabe für jeden Naturforscher und Ingenieur."

Mit Band VII wird das Werk von *R. Rothe* zum Abschluß gebracht. Auch für diesen Band ist die enge Verbindung von Theorie mit Anwendungen und die prägnante Art der Darstellung charakteristisch. *N. Hofreiter*, Wien

Höhere Mathematik für den Praktiker. Von *G. Joos* und *Th. Kaluza* †. Achte Auflage. Mit 97 Textabb., XII, 399 S. Leipzig: J. Ambrosius Barth-Verlag. 1956. DM 21.60.

Gegenüber der siebenten Auflage, die erst vor 2 Jahren erschien und in dieser Zeitschrift (Mh. Math. **58**, 128) besprochen wurde, enthält die achte Auflage im Anhang eine 12 Seiten lange Einführung in die *Laplace*-Transformation. Dies werden insbesondere die Elektrotechniker sehr begrüßen.

N. Hofreiter, Wien

The Theory of Functions of Real Variables. Von *L. M. Graves*. Zweite Auflage. (International series in pure and applied mathematics.) XII, 375 S. New York-Toronto-London: McGraw-Hill Book Company. 1956. $ 7.50.

Die zweite Auflage des in der amerikanischen Literatur oft zitierten Lehrbuches unterscheidet sich von der ersten insbesondere durch die Hinzufügung zweier neuer Kapitel: Eines betrifft die abstrakte Mengenlehre und das andere eine Einführung in die allgemeine Theorie der metrischen Räume. Im übrigen hat sich das Werk in seiner neuen Gestalt noch mehr den modernen mathematischen Bestrebungen angepaßt, verliert sich aber niemals in Spezialuntersuchungen. Die Darstellung ist klar und sauber. Die Betonung liegt auch jetzt auf Funktionen einer Veränderlichen. Hinweise auf den mehrdimensionalen Fall werden immer wieder gegeben. Mindestens bei der Darstellung des Lebesgueschen Integrales würde sich vielleicht der umgekehrte Vorgang empfehlen. — Mit Bedauern stellt man fest, daß es in der deutschsprachigen Literatur kein ähnliches Werk gibt. *L. Schmetterer*, Wien

Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen. Von *H. Behnke* und *F. Sommer*. (Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften: Band **77**.) X, 582 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1955. DM 66.—.

Dieses Lehrbuch — und ein solches ist es in des Wortes bestem Sinn — vermittelt den Studierenden in methodisch ausgezeichneter Weise stufenweise immer wieder eine in gewissem Sinn abgeschlossene Darstellung der Funktionentheorie unter gleichmäßiger Berücksichtigung der verschiedenen Gesichtspunkte beim Aufbau der Theorie.

Im ersten Kapitel wird die Analysis der komplexen Zahlen entwickelt: die grundlegenden Begriffe bis zum Integral und den Potenzreihen werden gegeben; hervorgehoben sei, daß von der im Anschluß an die stereographische Abbildung definierten chordalen Distanz zweier Punkte systematisch Gebrauch gemacht wird. Das zweite Kapitel setzt mit dem Cauchyschen Satz ein und bringt dann die im Umkreis liegenden Sätze; ein Anhang gilt den harmonischen Funktionen. Es folgt die analytische Fortsetzung, hier noch beschränkt auf Funktionen, die eindeutig auf einem Gebiet der Ebene sind, ferner die Laurentschen Reihen, Partialbruchentwicklungen, Entwicklungen nach *Fourier*, nach Orthogonalfunktionen und asymptotischen Entwicklungen. Erst im fünften Kapitel wird die konforme Abbildung behandelt: hier werden auch die linearen Transformationen, die Gruppen von linearen Transformationen und allgemein die Automorphismen behandelt, woran sich der Riemannsche Abbildungssatz anschließt, das Randverhalten der Abbildungsfunktionen, der Spiegelungssatz und endlich einiges über schlichte Funktionen und Verzerrungssätze. Die beiden letzten Kapitel gehören den Riemannschen Flächen: Nach einigen erklärenden Beispielen werden die Riemannschen Flächen definiert und die algebraischen Funktionen als die zu kompakten Riemannschen Flächen gehörigen etwas näher untersucht; deren topologische Eigenschaften werden dann in einem Anhang behandelt. Endlich folgt die Uniformisierungstheorie, indem die universelle Überlagerungsfläche konstruiert und abgebildet wird, wobei sich die verschiedenen Typen ergeben. Im letzten Kapitel (Funktionen auf Riemannschen Flächen) werden anschließend zunächst die diskontinuierlichen Gruppen linearer Transformationen und deren automorphe Funktionen untersucht. Mit Hilfe der Poincarèschen Thetafunktionen sind automorphe Funktionen sichergestellt und die kompakten Riemannschen Flächen als die Gebilde von algebraischen Funktionen gegeben. Die Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale, sowie einiges über Funktionen auf nichtkompakten Riemannschen Flächen bilden den Abschluß des inhaltsreichen Werkes. *H. Hornich*, Graz

Integral Functions. Von *M. L. Cartwright.* (Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics: No. 44.) Mit 4 Textabb., VIII, 131 S. Cambridge: At the University Press. 1955. 18 s.

Das Studium der ganzen Funktionen ist eine der wichtigsten Aufgaben der Funktionentheorie und noch lange nicht abgeschlossen. Abgesehen von den speziellen ganzen Funktionen, welche z. B. in der mathematischen Physik oder der analytischen Zahlentheorie auftreten, bietet auch die allgemeine Theorie der ganzen Funktionen noch manches ungelöste Problem. Da die meisten Bücher über dieses Gebiet vergriffen sind und auch die neueren Ergebnisse nicht mehr enthalten (eines der letzten Bücher dieser Art ist das von *Valiron* aus dem Jahre 1923), ist es sehr zu begrüßen, daß nun eine neue Monographie über diesen Gegenstand vorliegt. Das Buch beginnt mit der Bereitstellung verschiedener technischer Hilfsmittel wie der Poisson-Jensenschen Formel in der allgemeinen Gestalt von *F.* und *R. Nevanlinna* oder des Satzes von *Borel-Caratheodory*. Das zweite Kapitel bringt die ganzen Funktionen endlicher Ordnung, insbesondere die Hadamardsche Produktzerlegung und den Satz von *Picard-Borel* für diese spezielle Klasse von ganzen Funktionen. Hierauf folgen verschiedene mit dem Prinzip von *Phragmén-Lindelöf* zusammenhängende Ergebnisse und Sätze von *Carleman*, *Carlsson* und *F. und R. Nevanlinna*. Die nun in fünf Kapiteln folgenden feineren Untersuchungen (z. B. von *Julia* über mit dem *Picard*schen Satz zusammenhängende Fragen) sind zu speziell, als daß über sie an dieser Stelle genauer berichtet werden könnte. Betont sei noch, daß überall auch die neuesten Arbeiten berücksichtigt wurden und so der Leser einen lebendigen Einblick in die Vielfältigkeit der noch offenen Probleme erhält.

Die Verfasserin, welche selbst wertvolle Beiträge zur Theorie der ganzen Funktionen geliefert hat, hat hier ein außerordentlich anregendes Werk geschaffen, welches trotz des verhältnismäßig geringen Umfanges eine gründliche und doch leicht lesbare Einführung in die oft schwierige Materie vermittelt.

K. Prachar, Wien

Einführung in die Theorie der Differentialgleichungen im reellen Gebiet. Von *L. Bieberbach.* (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften: Band 83.) Mit 9 Textabb., VIII, 281 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1956. DM 29.80, geb. DM 32.80.

Nach seiner Darstellung der gewöhnlichen Differentialgleichungen auf funktionentheoretischer Grundlage bewährt der Verfasser nunmehr seine große Kunst der klaren und immer eigenständigen Darstellung im reellen Gebiet der Differentialgleichungen.

Zunächst kommen ausführlich die Existenz- und Unitätssätze (Lösungstrichter) der gewöhnlichen Differentialgleichungen und anschließend die elementaren Integrationsmethoden. Es folgen die stationären Differentialgleichungen bzw. Systeme von solchen (bei denen also die unabhängige Variable nicht explizit auftritt) und nahezu stationäre Differentialgleichungen. In einem Kapitel über Randwertaufgaben werden u. a. das Duffingsche Schwingungsproblem mit einem sehr einfachen Existenzbeweis und die Sturmschen Sätze behandelt. Der letzte Abschnitt ist den partiellen Differentialgleichungen gewidmet: Natürlich kann nur ein weniges über Charakteristiken und vollständige Integrale sowie über Differentialgleichungen ohne Integrale gesagt werden.

H. Hornich, Graz

Handbuch der Laplace-Transformation. Von *G. Doetsch.* Band II: Anwendungen der Laplacetransformation. 1. Abteilung. (Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften. Mathematische Reihe: Band 13.) Mit 48 Textabb., 436 S. Basel-Stuttgart: Verlag Birkhäuser. 1955. sfr. 52.—.

Die *Laplace*-Transformation erfreut sich einer immer größeren Beliebtheit auch bei Physikern und Technikern, welche sonst für die Anwendung funktionentheoretischer Methoden nur bis zu einer gewissen Grenze zu gewinnen sind. Dies mag zum Teil daran liegen, daß die Korrespondenz zwischen einer Funktion und ihrer Bildfunktion leicht in Rezeptform zu kleiden ist; aber zu einem nicht geringen Teil liegt dies auch an der unermüdlichen Arbeit des Verfassers, welcher keine Mühe gescheut hat, in seinen Büchern dieses nützliche Werkzeug auch dem „angewandten Mathematiker" näherzubringen. — Der vorliegende zweite Band bringt Anwendungen der im ersten Band entwickelten theoretischen Grundlagen. Es handelt sich dabei zu einem großen Teil um „innermathematische" Anwendungen, so daß auch der „reine Mathematiker" bei der Lektüre des Buches viel Interessantes finden wird. Nach einem zusammenfassenden Einleitungskapitel, in dem die wichtigsten Gesetzmäßigkeiten der Laplacetransformation nochmals übersichtlich zusammengestellt werden, bringt der erste Teil des Buches in neun Kapiteln verschiedene Methoden, die zum Teil schon auf *Laplace* selbst zurückgehen. Sie werden an einer großen Anzahl von interessanten und illustrativen Beispielen erläutert, welche die Entwicklungen der meisten bisher bekannten speziellen Funktionen enthalten. Der zweite Teil, mit „Konvergente Entwicklungen" überschrieben, bringt Zusammenhänge der *Laplace*-Transformation mit den Fakultätenreihen und Reihenentwicklungen nach verschiedenen speziellen Funktionensystemen, z. B. gewissen Orthogonalsystemen. Den Anwendungen der *Laplace*-Transformation zur Lösung verschiedener Typen von gewöhnlichen Differentialgleichungen ist der dritte Teil des vorliegenden Bandes gewidmet. Von der Fülle des hier gebotenen Stoffes erwähnen wir nur die besonders ausführliche Behandlung der Gleichungen der Regelungstechnik und der elektrischen Schaltungen. Den Schluß des Bandes bilden ein Anhang über die *Bürmann-Lagrange*sche Reihe, zahlreiche literarische und historische Hinweise, ein Sachregister und einige kleinere Berichtigungen zu Bd. 1. — Ein sehr weiter Kreis von Interessenten wird die Anschaffung dieses Buches nützlich finden und dem Erscheinen des dritten Bandes, welcher partielle Differentialgleichungen behandeln soll, erwartungsvoll entgegensehen.

K. Prachar, Wien

Variationsrechnung. Von *G. Grüss.* Zweite Auflage. Herausgegeben von *W. Meyer-König.* 282 S. Heidelberg: Quelle und Meyer. 1955. DM 14.—.

Die erste Auflage erschien 1938 und wurde in dieser Zeitschrift (Mh. Math. **49**, 6) kurz besprochen. Die zweite Auflage ist weitgehend ein photomechanischer Nachdruck. Stark umgearbeitet und erweitert wurde der Abschnitt über direkte Methoden der Variationsrechnung, die in neuerer Zeit von großer Bedeutung geworden sind. Es werden die Grundgedanken skizziert und an einigen charakteristischen Beispielen illustriert. Hier zeigt sich auch der enge Zusammenhang zwischen Variationsrechnung und Eigenwertproblemen. Das vielfach bewährte Verfahren von *Ritz-Galerkin* zur Lösung von Randwertaufgaben und zur Berechnung von Eigenwerten wird dargestellt und an Beispielen erprobt. Das Buch ist auch heute eine sehr gute Einführung in die Variationsrechnung und enthält die erste und zweite Variation, die Theorie von *Weierstraß* und direkte Methoden

der Variationsrechnung. Viel Platz wurde den Anwendungen der Variationsrechnung auf Geometrie und Mechanik eingeräumt. *N. Hofreiter*, Wien

Einführung in die mathematische Statistik. Von *L. Schmetterer*. Mit 13 Textabb., XXIII, 405 S. Wien: Springer-Verlag. 1956. Geb. S 294.—, DM 49.—, $ 11.65, sfr. 50.10.

Die Statistik ist lange Zeit ein Aschenbrödel in der Mathematik gewesen: nur wenige Begriffe wie Mittelwerte, Streuung, Gaußverteilung und Regression bildeten ihre Ausstattung und das Handwerkszeug derer, die mit Massenerscheinungen zu tun hatten, während die Mathematiker sich nicht viel um sie kümmerten. Erst die Bedürfnisse der Wirtschaft, vor allem in den großräumigen Ländern trieben die Entwicklung voran, es entstanden eine Reihe von Methoden, die immer mehr und in immer rascherem Tempo auch das Interesse der Mathematiker erweckten und die — nicht zuletzt zum Nutzen gerade der Praxis — systematisch zu einer großen mathematischen Theorie ausgestaltet wurden. Im deutschen Sprachraum war bisher noch keine zusammenfassende Darstellung der Statistik für Mathematiker erschienen. Diesem Mangel und dem Bedürfnis nach einem solchen Werk abzuhelfen, hat sich der Verfasser, seit langem in engster Zusammenarbeit mit der Praxis befindlich, entschlossen, seine seit mehreren Jahren an der Wiener Universität und Technischen Hochschule gehaltenen Vorlesungen über Statistik herauszugeben, wobei seine Arbeit sich natürlich nicht in einer reinen Kompilation, welche übrigens hier durchaus nicht einfach ist, erschöpft. Der Verf. hat mit diesem Buch die Statistiker, die Mathematiker und last not least die Praktiker sich zu Dank verpflichtet.

Das umfangreiche erste Kapitel bringt den auf axiomatischem Weg eingeführten Begriff der Wahrscheinlichkeit und seine Theorie — vor allem die verschiedenen Verteilungsfunktionen. Das zweite Kapitel beginnt mit der Stichprobentheorie und führt damit in das eigentliche Gebiet der Statistik. Die Stichprobentheorie normalverteilter Grundgesamtheiten wird mit dem Satz von *Cochran* eingeleitet; Anwendungen für die Qualitätskontrolle werden diskutiert. Anschließend folgen die Konfidenzbereiche mit einem Existenzbeweis nach *Neyman*. Um auf Grund von Stichproben einen unbekannten Parameter in der Verteilungsfunktion abgrenzen zu können, werden zunächst die Schätzfunktionen für den Parameter eingeführt, deren Theorie im wesentlichen auf *Fisher* zurückgeht, dem auch das Konstruktionsprinzip für die Schätzfunktionen (Maximum Likelihood-Prinzip) zu verdanken ist. Ein weiteres Kapitel gehört der von *Neyman* und *Pearson* begründeten Testtheorie. Es folgt die Regressionstheorie und die Stichprobentheorie von mehrdimensionalen Normalverteilungen. Ein letztes Kapitel bringt die in neuerer Zeit vielfach entwickelten Untersuchungen der parameterfreien Methoden, während bisher immer Verteilungsfunktionen einer bestimmten Klasse mit Parametern zugrundegelegt wurden. In einem Anhang wird noch die *Bayes*sche Auffassung besprochen, nach der nicht die Stichprobenvariablen nach einer Verteilung mit einem unbekannten Parameter verteilt gedacht werden, sondern dieser Parameter gleichfalls als zufällige Variable auftritt.

Das Buch setzt nur etwa die Kenntnis der Differential- und Integralrechnung voraus und auch das *Lebesgues*sche Integral sowie die *Borel*schen Mengen, die in den späteren Kapiteln verwendet werden, dürften wohl keine Schwierigkeiten bereiten. Sehr glücklich war der Gedanke, in einem Verzeichnis die Übersetzung englischsprachiger Fachausdrücke zu geben.

Das Buch wird sicher dazu beitragen, der Statistik die ihr gebührende Stellung in der Wissenschaft und in der Praxis zu geben. *H. Hornich*, Graz

The Theory of Games and Linear Programming. Von *S. Vajda.* (Methuen's Monographs on Physical Subjects.) 106 S. London: Methuen & Co. — New York: J. Wiley & Sons. 1956. 8 s. 6 d.

Die Bücher dieser Sammlung entsprechen etwa der deutschsprachigen Göschen-Sammlung, deren Leitwort gut auf das Büchlein von *Vajda* paßt: Wissen, in kurzen, klaren, allgemeinverständlichen Einzeldarstellungen übermitteln. Das Bändchen beginnt mit einer Einführung in die Spieltheorie und dann wird der Hauptsatz für Zwei-Personen-Nullsummenspiele mit endlich vielen Strategien nach *von Neumann* und *Morgenstern* bewiesen. Ein Beweis von *Ville* wird angedeutet. Nun wird zu den allgemeinen linearen Programmen übergegangen. Die Simplex-Methode von *Dantzig* und die neue Methode der Leading Variables von *Beale* werden dargestellt. Bekanntlich besteht für ein lineares Minimumprogramm und das zugehörige transponierte Maximumprogramm ein Dualitätsprinzip, welches sich darin äußert, daß die beiden Probleme zugleich lösbar oder unlösbar sind und dasselbe Optimum besitzen. Diesem wichtigen Sachverhalt ist ebenfalls ein Kapitel gewidmet. Schließlich wird die Theorie der linearen Programme auf die Lösung von Spielen angewendet. Damit ist aber der Inhalt nicht ausreichend charakterisiert. Es müssen nämlich noch die verhältnismäßig vielen Beispiele und die geometrischen Darstellungen von Spielen und linearen Programmen erwähnt werden, die vor allen Dingen den Praktiker erfreuen. Dem Praktiker zuliebe ist wahrscheinlich auch auf die Verwendung des Matrizenkalküls verzichtet worden. Von den kleinen Druckversehen sei auf den Vorzeichenfehler auf S. 46, Formel 1 hingewiesen. Da der Verfasser ein Gebiet behandelt hat, das mehr und mehr in den Vordergrund des Interesses rückt und die Theorie und Anwendung linearer Programme bisher noch keine zusammenfassende Darstellung gefunden hat, kann man dem Bändchen eine weite Verbreitung voraussagen und das um so mehr, als es sich um ein durchaus geglücktes Werkchen handelt. *L. Schmetterer*, Wien

Tafeln zum Vergleich zweier Stichproben mittels X-Test und Zeichentest (Tables for Comparing Two Samples by x-Test and Sign Test). Von *B. L. van der Waerden* und *E. Nievergelt.* Mit 6 Zahlentafeln, IV, 34 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1956. DM 4.80.

Heute setzt sich immer mehr die Erkenntnis durch, daß die Voraussetzung einer normalverteilten Grundgesamtheit, die den üblichen Kleinstichprobentests zu Grunde liegt, nur in wenigen Fällen verifiziert ist. Das führt dazu, daß auch in den Kreisen der Anwendung mathematisch-statistischer Methoden die nichtparametrischen Teste immer bekannter werden. Leider fehlte es bisher an ausreichendem Tafelmaterial. Diese empfindliche Lücke wird durch die vorliegende Tafel für zwei wichtige Tests geschlossen. Der von *van der Waerden* gefundene X-Test besitzt asymptotisch dieselbe Güte wie der t-Test und ist auch für kleinen Stichprobenumfang sehr wirksam, wenn eine Normalverteilung zu Grunde liegt. Anderenfalls ist der X-Test dem t-Test sogar vielfach überlegen. Für Stichprobenumfang $\leqq 50$ und Sicherheitswahrscheinlichkeiten 0,5, 1 und 2% sind die Sicherheitsschranken unmittelbar ablesbar. Weiteres Tafelmaterial gibt u. a. die für den X-Test benötigten Quantile der Normalverteilung. Für den Zeichentest stehen die Sicherheitsschranken für Stichprobenumfänge $\leqq 100$ und Sicherheitswahrscheinlichkeiten (einseitig) von 2,5, 1 und 0,5% zur Verfügung. Der Begleittext unterrichtet hinreichend über die mathematischen Grundlagen und macht die Anwendung der Tafeln klar. Einem anscheinend bei den Tafelwerken des Verlages sich einbürgernden Usus folgend, ist auch hier ein Teil des Textes zweisprachig (deutsch-englisch) formuliert. *L. Schmetterer*, Wien

Nomographie. Von *H. Athen.* (Schriftenreihe zur Mathematik: Heft 6.) Mit 55 Textabb., 56 S. Frankfurt a. M.-Pinneberg: O. Salle-Verlag. 1956.

Mit dem vorliegenden Heft hat der Verfasser in knapper, gut verständlicher Darstellung das Wichtigste aus der Nomographie behandelt. Diese Beschränkung auf das Wichtigste dieses Zweiges der praktischen Mathematik und das Verwenden von möglichst elementaren Hilfsmitteln bei der Behandlung von nomographischen Haupttypen erfolgte mit Rücksicht auf einen großen Benutzerkreis. Die zahlreichen gut ausgewählten Beispiele und Übungsaufgaben aus Mathematik, Physik und Technik unterstützen wesentlich dieses Bestreben. Es werden Funktionsleitern, Funktionsnetze, Netztafeln und Fluchtlinientafeln behandelt. An einzelnen Beispielen wird genau ausgeführt, wie ein Nomogramm verschiedenen praktischen Bedürfnissen angepaßt werden kann. Um den vorgefaßten Rahmen des Heftes nicht zu sprengen, hat der Verfasser das vierte und letzte Kapitel über die projektive Abbildung und über die Dualität von Netz- und Fluchtlinientafeln nur kurz behandelt bzw. angedeutet; Genauigkeitsfragen sowie die Darstellung komplexer Funktionen wurden nicht aufgenommen.

Möge das Heft vielen Interessenten zur Einführung in die Nomographie dienen. *J. Laub*, Wien

Der moderne Rechenstab. Ein Vorbereitungsbuch für Schule und Hochschule und ein Hilfsbuch für die Praxis. Von *R. Stender.* Dritte, erweiterte Auflage. Mit 33 Textabb., 118 S. Frankfurt a. M.—Pinneberg: O.-Salle-Verlag. 1955. DM 3.80.

Das Buch zeigt, was mit dem modernen Schulrechenstab (Aristo Scholar) erreicht werden kann. Multiplizieren, Dividieren und Quadratwurzelziehen sind dabei nur wichtige Teilgebiete. Besonders wird auf die Vorteile der Reziprokskala hingewiesen. Zahlreiche Aufgaben aus der Praxis illustrieren die vielfältige Anwendbarkeit des Rechenstabes. Ein Kapitel behandelt die modernen Rechenstäbe „System Darmstadt" und „System Studio". Die Darstellung ist für jedermann leicht verständlich. *N. Hofreiter*, Wien

Shop Mathematics. Von *C. E. Stout.* Mit 250 Textabb., XI, 282 S. New York: J. Wiley & Sons. — London: Chapman & Hall. 1955. $ 3.70.

Das Buch setzt sich zum Ziel, dem Handwerker die mathematischen Grundlagen für seinen Beruf zu geben. Der dafür vorgesehene Lehrstoff der Mathematik wird in vier Abschnitten erarbeitet. Der erste Abschnitt behandelt das Rechnen mit ganzen Zahlen, Brüchen und Dezimalzahlen und das Rechnen mit Verhältnissen und Proportionen. Es folgen Anwendungen wie Berechnung der Zahnräder, der Schnittgeschwindigkeiten u. a. m. Im zweiten Abschnitt werden besprochen: Die relativen und allgemeinen Zahlen, Potenzen und Wurzeln, Flächen- und Volumsformeln, der pythagoräische Lehrsatz, lineare Gleichungen mit einer Unbekannten und quadratische Gleichungen. Der dritte Abschnitt ist der elementaren Geometrie gewidmet und enthält das Wichtigste über das Dreieck, das Viereck, das Vieleck und über den Kreis. Es folgt eine kurze Einführung in die Trigonometrie. Im vierten Abschnitt wird ausführlich das Rechnen mit Logarithmen und das Rechnen mit dem Rechenschieber erläutert. Tafeln mit vierstelligen Logarithmen der Zahlen 10—999 und der drei Winkelfunktionen Sinus, Kosinus, Tangens sind beigegeben. Der Anhang enthält Tafeln mit den fünfstelligen natürlichen Werten aller sechs Winkelfunktionen. An jedes Kapitel

schließen sich zahlreiche, den verschiedenen Anwendungsbereichen entnommene Übungsbeispiele an. Die vielen Zeichnungen sind sauber ausgeführt und sehr gefällig. *L. Laub*, Wien

Mathematische Unterhaltungen I. Mehrfarbenprobleme. Von *E. B. Dynkin* und *W. A. Uspenski*. (Kleine Ergänzungsreihe zu den Hochschulbüchern für Mathematik: Band XIII.) Mit 90 Textabb., 65 S. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1955. DM 5.10.

Es werden Landkarten (bzw. Kurvennetze) betrachtet und die Frage aufgeworfen, wieviel Farben unbedingt erforderlich sind, um eine Karte (ein Kurvennetz) „regulär" färben zu können. In diesem Zusammenhang werden 27 Aufgaben über zwei Farben gestellt. Es folgen Erörterungen und 15 Aufgaben über das Färben mit drei Farben. Ein kurzes Kapitel befaßt sich mit Vierfarbenproblemen und dem damit zusammenhängenden Satz von *Wolynski*. Der Satz von *Euler* und der Fünffarbensatz beschließen die Betrachtungen. Im Anhang wird die Färbung der Sphäre mit drei Farben besprochen. Fast die Hälfte des Büchleins nimmt das Kapitel „Lösungen" ein; darin werden die einzelnen Lösungswege der gestellten Aufgaben ausführlich angegeben.

Freunde dieser Art der mathematischen Unterhaltungen werden gerne nach diesem Büchlein greifen. *J. Laub*, Wien

Konstruktive Geometrie für Techniker. Von *F. Hohenberg*. Mit 432 Textabb., IX, 272 S. Wien: Springer-Verlag. 1956. S 117.—, DM 19.50, $ 4.65, sfr. 20.—; geb. S 132.—, DM 22.—, $ 5.25, sfr. 22.60.

Das ausgezeichnete Lehrbuch ist aus Vorlesungen über darstellende Geometrie hervorgegangen, die der Verfasser an der Technischen Hochschule in Graz hält. Im Einklang mit der von *E. Kruppa* für dieses Wissensgebiet vorgeschlagenen Bezeichnungsweise benennt der Verfasser sein Buch „Konstruktive Geometrie" und stellt sich darin die Aufgabe, dem jungen Techniker alle jene Kenntnisse zu vermitteln, die ihn befähigen, geometrische Konstruktionen und Gebilde verstehen und gestalten und geometrische Vorgänge erfassen zu können. Dieser für den Bildungsgang des Ingenieurs so grundlegenden Aufgabe wird das Lehrbuch in vorbildlicher Weise gerecht.

Den Erfordernissen der modernen Technik einerseits und der knapp bemessenen Ausbildungszeit des jungen Technikers anderseits Rechnung tragend, weicht das Buch sowohl hinsichtlich der Auswahl des dargebotenen Lehrstoffes als auch in der Darstellung desselben vom Herkömmlichen grundlegend ab. Die theoretischen Betrachtungen sind den praktischen Anwendungen weitestgehend angepaßt und auf das Wesentlichste reduziert. Die Beweisführungen sind so kurz wie möglich gehalten, wobei sich äußerlichste Knappheit mit absoluter Prägnanz verbindet.

Auch bei den rein geometrischen Ausführungen geht der Verfasser wo immer dies nur möglich ist, von praktischen Beispielen aus und es gelingt ihm so stets die Aufmerksamkeit des technisch interessierten Lesers auf die theoretischen Betrachtungen hinzulenken und ihm die grundlegende Bedeutung derselben vor Augen zu führen.

Die den einzelnen Kapiteln angeschlossenen Beispiele und Übungen sind allen nur denkbaren Anwendungsgebieten entnommen und stellen, meist mit einer kurzen Erläuterung versehen, eine organische Ergänzung und Erweiterung des dargebotenen Lehrstoffes dar.

Die dem Buch beigegebenen Abbildungen sind vorbildlich ausgeführt, sie sind überaus klar und anschaulich und dort, wo dies — wie etwa bei der Darstellung von Bauwerken — angestrebt wird, von hervorragender Bildwirkung.

Das Buch ist für die Studierenden aller Richtungen der Technischen Hochschulen gedacht, wobei dank der übersichtlichen Gliederung des Buches unmittelbar klar ist, welche Kapitel für die einzelnen Studienrichtungen in Betracht kommen.

Im ersten Abschnitt des Buches wird das Grund- und Aufrißverfahren, die Axonometrie und die Zentralprojektion behandelt. Hier sei als Neuerung vor allem auf das vom Verfasser entwickelte Verfahren des „Umzeichnens von Perspektiven" und auf die perspektive Darstellung bei geneigter Bildebene hingewiesen. Zu welch ausgezeichneten Bildwirkungen man durch solche Darstellungen gelangen kann, zeigen die diesbezüglichen Abbildungen.

Der zweite Abschnitt bringt die technisch wichtigen Kurven und Flächen. Hier sind vor allem die bei der Besprechung der Schraubflächen zur Behandlung gelangenden vielfältigen technischen Anwendungen zu erwähnen. Dabei werden auch die bei der technischen Herstellung dieser Flächen auftretenden geometrischen Konstruktionen und Vorgänge einer eingehenden Betrachtung unterzogen.

Der dritte Abschnitt ist der Geometrie der Getriebe und Verzahnungen gewidmet. Was hier von den einfachsten Tatsachen der kinematischen Geometrie ausgehend in überaus klarer und verständlicher Weise besprochen und was hier sowohl auf dem Gebiete der Getriebe als auch der Verzahnungen an vielfältigen technischen Anwendungen zusammengestellt und in souveräner Weise behandelt wird, muß wohl einzig in seiner Art bezeichnet werden.

So kann dieses hervorragende Lehrbuch den Studierenden aller Fachrichtungen der Technischen Hochschulen und aller Hochschulen technischer Richtung überhaupt zum Studium wärmstens anempfohlen werden. Darüber hinaus wird der Studierende höherer Semester und der bereits in der Praxis stehende Techniker in diesem Buche einen willkommenen und ausgezeichneten Behelf zur Auffrischung und Ergänzung seiner Kenntnisse erblicken. Der Fachmann schließlich wird aus diesem Buch so manche Anregung für die Gestaltung seiner eigenen Vorlesungen empfangen. *L. Hofmann*, Wien

Abelsche Funktionen und algebraische Geometrie. Von *F. Conforto* †. Aus dem Nachlaß bearbeitet und herausgegeben von *W. Gröbner*, *A. Andreotti* und *M. Rosati*. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften: Band 84.) Mit 8 Textabb., XI, 276 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1956. DM 38.60, geb. DM 41.80.

Es ist sehr zu begrüßen und den Herausgebern, insbesonders *W. Gröbner* sehr zu danken, daß nunmehr die deutsche Bearbeitung der Vorlesungen des so früh verstorbenen italienischen Mathematikers *F. Conforto* aus dessen Nachlaß erscheinen konnte. Das Ziel des Buches „eine anschauliche und verständliche, durch moderne Abstraktionen nicht allzu beschwerte Darstellung" des von so vielen ausgezeichneten Mathematikern bearbeiteten Gebietes zu geben, darf wohl als durchaus gelungen bezeichnet werden.

Die Darstellung beginnt mit den allgemeinen Abelschen Funktionen als den meromorphen Funktionen von p Variablen mit $2p$ Periodensystemen, für die ihre Darstellung als Quotienten zweier intermediärer Funktionen sowie deren Darstellung als Thetareihen abgeleitet wird. Die speziellen Abelschen Funktionen und das Umkehrproblem ordnen sich also nur als Beispiele dem allgemeinen

Fall unter. Dieses Programm wird nach den Arbeiten von *Appell* (für $p = 2$) und *Frobenius* nun allgemein und systematisch von *Conforto* durchgeführt. Die zweite Hälfte des Buches gilt den Abelschen und besonders den Picardschen Mannigfaltigkeiten; die Beziehungen zur algebraischen Geometrie bringen damit zur analytischen Theorie nun auch die anschaulich-geometrische Seite. — Ein Anhang über Funktionen mehrerer Variabler bringt den Weierstraßschen Vorbereitungssatz und den grundlegenden Satz von *Cousin*.

Möge das Buch dazu beitragen, das Interesse der Mathematiker auf dieses schöne und an Problemen immer wieder reiche Gebiet zu lenken!

H. Hornich, Graz

Kreis und Kugel. Von *W. Blaschke*. Zweite, durchgesehene und verbesserte Auflage. Mit 27 Textabb., VIII, 167 S. Berlin: W. de Gruyter & Co. 1956. Geb. DM 18.60.

Vor genau 40 Jahren erschien die erste Auflage (ausführliche Rezension in Mh. Math. **28,** 4). Darin gab der Verfasser einfache Beweise für die isoperimetrische Eigenschaft von Kreis und Kugel. Dabei knüpfte er an Verfahren von *J. Steiner* an und gab mit Mitteln der Analysis in einfacher Art die noch notwendigen Ergänzungen. Daran schlossen sich Betrachtungen an, die allgemein für konvexe Körper gelten. Das Buch gab sehr viele Anregungen. Allein der Auswahlsatz von *Blaschke* wurde seither sehr oft zitiert. Wenn auch inzwischen viel Neues erschien, so macht es gar nichts, daß die zweite Auflage ein fast ungeänderter Nachdruck ist, wobei allerdings die neuere Literatur zitiert wird.

N. Hofreiter, Wien

Algebraic Threefolds. With special regard to problems of rationality. Von *L. Roth*. (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Neue Folge: Heft 6.) VIII, 142 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1955. DM 19.80.

Die Theorie der algebraischen Mannigfaltigkeiten kann, auch in ihrer klassischen Richtung, bekanntlich nur in geringem Ausmaße für beliebig hohe Dimensionen gleichzeitig entwickelt werden; vielmehr kommen bei jeder höheren Dimension spezifisch neue Komplikationen hinzu, welche die Probleme in nicht vorhersehbarer Weise erschweren und völlig neue Untersuchungen erfordern. So liegen heute eine große Anzahl von besonderen Untersuchungen mit interessanten Ergebnissen über Mannigfaltigkeiten der Dimension 3 vor, darunter auch viele Originalarbeiten des Verf., die in dem vorliegenden Ergebnisheft in einer sehr klaren und übersichtlichen Weise zusammengestellt sind. Besonderes Gewicht wird auf die Fragen der Rationalität gelegt: Eine V_d heißt nämlich „rational" oder genauer „unirational", wenn sie eine rationale Parameterdarstellung besitzt, d. h. in $(1, n)$-Korrespondenz zum linearen S_d gesetzt werden kann; sie heißt „birational", wenn sich auch eine $(1, 1)$-Korrespondenz herstellen läßt. Nach einem klassischen Satz von *Lüroth* ist jede rationale Kurve birational, dasselbe gilt nach einem bereits sehr schwer zu beweisenden Satz von *Castelnuovo* auch noch für Flächen, aber nicht mehr für V_3. In der Ebene ist jeder irreduzible Kegelschnitt, im Raum jede allgemeine irreduzible kubische Fläche (kein Kegel) rational (*M. Noether*); die zu erwartende Verallgemeinerung hat *U. Morin* geliefert, wonach jede allgemeine irreduzible Form V_d^g eines gegebenen Grades g unirational ist, falls d genügend groß gegenüber g ist. Es ist auch sehr zu danken, daß der Verf. die wichtigen Untersuchungen von *Fano* über die Mannigfaltigkeiten V_3^{2p-2}, deren Kurvenschnitte kanonische Kurven des Geschlechtes p sind, in einer leichter verständlichen Weise verarbeitet hat.

Im letzten Kapitel werden die Abelschen Mannigfaltigkeiten behandelt, die Parameterdarstellungen durch Abelsche Funktionen und daher eine genauer durchforschte Theorie besitzen; sie sind geometrisch durch das Vorhandensein einer p-gliedrigen kontinuierlichen Gruppe von birationalen Transformationen in sich ausgezeichnet, aber sie bilden eben deshalb eine ganz spezielle Klasse von algebraischen Mannigfaltigkeiten. Dieses Buch ist für jeden, der mit Fragen der algebraischen Geometrie zu tun hat, unentbehrlich. *W. Gröbner*, Innsbruck

Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie. Von *F. Hirzebruch*. (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Neue Folge: Heft 9.) VIII, 165 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1956. DM 30.80.

In diesem Ergebnisheft werden einige moderne topologische Methoden für die Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Variablen behandelt; Methoden und Resultate, die auf der von *Leray*, *H. Cartan* und *Serre* entwickelten Theorie der Garben (faisceaux) beruhen und neue Ergebnisse von *R. Thom*, *J.A.Todd* und des Verf. über das arithmetische Geschlecht benützen. Es ist ein wichtiges Ziel der Arbeit, die Übereinstimmung der von *Severi* gegebenen Definition des (virtuellen) arithmetischen Geschlechtes, die auf der Postulationsformel beruht, mit der topologischen Definition von *Todd* nachzuweisen. Daraus wird schließlich der *Riemann-Roch*'sche Satz für algebraische Mannigfaltigkeiten abgeleitet.

Um das Buch verstehen zu können, sind genaue Vorkenntnisse und Beherrschung des von dieser speziellen Schule verwendeten Symbolismus notwendig. Es scheint wohl auch gar nicht die Absicht des Verf. gewesen zu sein, einem breiteren Kreise von Mathematikern verständlich zu wirken. Andererseits scheint eine grundsätzliche Bemerkung angebracht, um die hier hervorgerufene Perspektive der algebraischen Geometrie zu entzerren, nämlich, daß die eigentlich bewegenden Grundprobleme der algebraischen Geometrie hier kaum gestreift werden. Es werden von vornherein nur singularitätenfreie algebraische Mannigfaltigkeiten zugelassen und deren topologische Invarianten betrachtet. Das interessante Gebiet beginnt aber gerade erst mit den Singularitäten und das Ziel der algebraischen Geometrie ist die Ermittlung von (absoluten) birationalen Invarianten, die gegenüber allgemeinen birationalen Transformationen, die keine topologischen Transformationen sind, Geltung behalten.

W. Gröbner, Innsbruck

Elementare Differentialgeometrie. Von *W. Haack*. (Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften. MathematischeReihe: Band 20.) VIII, 239 S. Basel: Birkhäuser-Verlag. 1955. sfr. 18.70.

Der Titel ist soweit berechtigt, als das Buch mit den Elementen der Differentialgeometrie, also mit den einfachen Eigenschaften der Kurven und Flächen, beginnt. Die letzten Kapitel führen aber doch weit über die Elemente hinaus. Ziel war, die Ideen von *Elie Cartan*, die sich in letzter Zeit als überaus fruchtbar erwiesen hatten, in einem einführenden Lehrbuch darzustellen. Ein Weg wäre gewesen, die Grundlagen der Methoden von *E. Cartan* an die Spitze zu stellen und die Differentialgeometrie darauf aufzubauen. Der Verfasser hat dies aber nicht getan, und zwar in der allgemein verbreiteten Ansicht, daß dies für Anfänger zu schwierig ist. Daher entwickelt er die Theorie der Raumkurven und Flächen im klassischen Sinne, also im wesentlichen nach *C. F. Gauß*. Die Darstellung ist allerdings so knapp, daß den Bedürfnissen der Hochschüler nur schwer

entsprochen wird. Ausgangspunkt ist stets die geometrisch anschauliche Vorstellung. Nachdem der Leser die wichtigsten Eigenschaften der Kurven und Flächen kennengelernt hatte, wird die Theorie nochmals nach den Ideen von *E. Cartan* entwickelt. Kap. 3 bringt die einparametrigen Dreibeinscharen und Kap. 9 die zweidimensionalen Dreibeinmannigfaltigkeiten. Es werden damit die Bewegungen von Dreibeinen, die von ein oder zwei Parametern abhängen, an den Anfang der weiteren Untersuchungen gestellt. Es zeigt sich, daß die Differentialgeometrie der Raumkurven als Sonderfall in der Theorie der Streifen enthalten ist. Durch die zweidimensionalen Dreibeinmannigfaltigkeiten gelangt man von neuem zur Differentialgeometrie der Flächen. Dazu ist ein einführendes Studium der Pfaffschen Formen notwendig. Mit den neuen Hilfsmitteln werden zunächst einige schon in früheren Kapiteln bewiesene Sätze der Flächentheorie neu bewiesen. Es ergeben sich die Grundformeln der Flächentheorie durch Spezialisierung der Dreibeinbewegungen. Man erkennt im 9. Kapitel deutlich die Überlegenheit der Cartanschen Methode. Das zehnte und letzte Kapitel beginnt mit dem Fundamentalsatz der Flächentheorie, also mit dem Problem der Existenz von Flächen zu gegebenen Fundamentalgrößen. Gerade bei solchen Existenzproblemen bewähren sich die Methoden von *E. Cartan*. Dann folgen Paragraphen über die Realisierung einer gegebenen Metrik und über das Biegungsproblem. Hier zeigt sich der enge Zusammenhang mit den Rand- und Anfangsproblemen der Theorie der partiellen Differentialgleichungen. Um auch die praktische Bedeutung der Differentialgeometrie zu betonen, werden Abbildungen zweier Flächen aufeinander ausführlich behandelt und so Rücksicht auf die Kartographie genommen. Das Literaturverzeichnis bringt eine Liste von Lehrbüchern zur Differentialgeometrie und von Abhandlungen über das Realisierungs- und Biegungsproblem. Der Verfasser hat ein Buch geschrieben, für das ein wirkliches Bedürfnis bestand und dem ein voller Erfolg beschieden sein wird. *N. Hofreiter*, Wien

Die innere Geometrie der konvexen Flächen. Von *A. D. Alexandrow*. (Mathematische Lehrbücher und Monographien II. Abt.: Band IV.) Mit 100 Textabb., XVII, 522 S. Berlin: Akademie-Verlag. 1955. Geb. DM 38.50.

Die klassische Differentialgeometrie, welche durch *Gauß* begründet wurde und sich seither zu einer umfangreichen Theorie entwickelt hat, beschränkt sich auf reguläre Flächen, das sind Flächen, welche eine analytische Darstellung mit Hilfe von genügend oft differentierbaren Funktionen gestatten. Sie gewinnt ihre Aussagen durch Verwendung von Hilfsmitteln der klassischen Analysis und behandelt vor allem das Verhalten der Flächen im Kleinen, wogegen sie in der Untersuchung des Gesamtverlaufes von Flächen wesentlich weniger erfolgreich ist. Das vorliegende Buch stellt nun in großer Ausführlichkeit eine ganz neuartige Flächentheorie dar; diese Theorie wurde in den letzten Jahrzehnten vom Verfasser und seinen Schülern geschaffen und ist auch weiterhin in ständigem Ausbau begriffen.

Die neue Theorie umfaßt zunächst eine viel umfangreichere Klasse von Flächen als die „alte" Differentialgeometrie; so werden z. B. jetzt auch Flächen mit Singularitäten zugelassen. Das Buch selbst beschränkt sich — vom letzten Kapitel abgesehen — auf konvexe Flächen, das sind Gebiete auf der Berandung von konvexen Körpern; gerade in letzter Zeit wurden jedoch auch für nicht konvexe Flächen sehr bedeutsame Ergebnisse erzielt, über die in einem Nachtrag des Buches berichtet wird. Die Resultate der klassischen Theorie sind in der Theorie von *Alexandrow* als Spezialfall enthalten, und diese liefert sogar eine Reihe neuer Ergebnisse über reguläre Flächen, besonders bei Problemen im

Großen. Überhaupt behandelt die neue Theorie gleichzeitig sowohl die Flächen im Großen als auch im Kleinen. In den grundlegenden Begriffen und Methoden weicht *Alexandrow* gänzlich von der klassischen Differentialgeometrie ab: Während in dieser die Metrik auf der Fläche durch ein Linienelement gegeben ist, wird bei *Alexandrow* die Entfernung zweier Punkte auf der Fläche als untere Grenze der Längen aller Verbindungskurven dieser Punkte auf der Fläche definiert, und mit Hilfe dieser „inneren" Metrik der Fläche werden nun die Grundbegriffe, wie Winkel, Flächeninhalt, Krümmung usw. erklärt. Und während sich die klassische Theorie bei ihren Beweisen vor allem auf den analytischen Formelapparat stützt, erweist sich jetzt als stärkstes Hilfsmittel die Methode, zunächst konvexe Polyeder zu untersuchen und dann die dafür erzielten Resultate durch Grenzübergang auf beliebige konvexe Flächen zu übertragen. Die neue Theorie stellt also vor allem auch insoferne einen wesentlichen Fortschritt dar, als in ihr die geometrischen Gesichtspunkte gegenüber den analytischen in jeder Hinsicht in den Vordergrund treten.

Die nachfolgende kurze Inhaltsangabe möge zur Orientierung über den Aufbau des Buches dienen: Nach einem Überblick über die gesamte Theorie werden zunächst allgemeine Sätze über rektifizierbare Kurven und Kurven kleinster Länge sowie über konvexe Bereiche abgeleitet. Dann werden die charakteristischen Eigenschaften der inneren Metrik konvexer Flächen entwickelt und die Eigenschaften des Winkels zwischen zwei kürzesten Linien einer konvexen Fläche untersucht; es folgt die Darstellung der Krümmungstheorie. Die nächsten drei Kapitel beschäftigen sich mit der Frage nach der Existenz von Flächen mit vorgegebener Metrik. Hierauf wird die Theorie der Kurven und die Theorie der Flächeninhalte auf konvexen Flächen dargestellt; weiter werden Flächen betrachtet, deren Krümmung bestimmten speziellen Bedingungen genügt. Im letzten Kapitel wird eine Verallgemeinerung der gesamten Theorie der konvexen Flächen vom Euklidischen Raum auf Räume mit konstanter Krümmung skizziert. In einem Anhang werden die Elemente der Theorie der konvexen Körper gebracht, soweit sie in dem Buch benötigt werden. Der bereits erwähnte Nachtrag gibt einen Überblick über Resultate, welche in dem Zeitraum nach Vollendung des russischen Originals dieses Buches erzielt wurden.

Vom Leser werden nur geringe Vorkenntnisse verlangt, vor allem werden die Grundtatsachen der Topologie und der Theorie des *Lebesgue*'schen Maßes verwendet. Die Beweise werden mit der für russische Lehrbücher typischen Ausführlichkeit und Sorgfalt gebracht, manche weniger wichtige Fragen werden aber nur referierend behandelt.

Es ist außerordentlich begrüßenswert, daß dieses grundlegende Werk durch die Übersetzung nun allgemein zugänglich geworden ist. Man kann erwarten, daß es auch in den westlichen Ländern zu vielen neuen Untersuchungen anregen wird. *W. Nöbauer*, Wien

The Geometry of Geodesics. Von *H. Busemann*. (Pure and Applied Mathematics: Band VI.) Mit 66 Textabb., X, 422 S. New York: Academic Press Inc. 1955. $ 9.—.

So groß der Vorteil der Beschreibung differentialgeometrischer Tatsachen durch Koordinaten auch sein mag, so wird dadurch andererseits auch mancher geometrischer Sachverhalt verdunkelt und die Gültigkeit mancher Sätze an Differentierbarkeitsannahmen geknüpft, welche hiezu nicht nötig wären. Angeregt durch die Lehre von den Punktmengen in abstrakten Räumen versuchte man schon seit längerer Zeit, von einem abstrakten metrischen Raum ausgehend durch geeignete Zusatzaxiome einen möglichst allgemeinen Raum zu erhalten,

in dem sich eine „Differentialgeometrie ohne Differentialrechnung" begründen ließe. Diese Art von Geometrie ist nun — nicht zuletzt durch Beiträge des Verfassers — soweit entwickelt worden, daß eine neue Monographie darüber berechtigt erscheint. Besonders die Finslersche Geometrie ist dieser Methode zugänglich und ihre Untersuchung muß „ohne Vorurteil durch Euklidische oder Riemannsche Methoden" in Angriff genommen werden, wie der Verfasser im Vorwort ausführt. (Allerdings wird auch eingeräumt, daß dieses Programm nicht streng durchführbar erscheint, da die Euklidische Tradition zu stark ist und es mehrere Generationen von Mathematikern erfordern kann, volle Freiheit in dieser Hinsicht zu gewinnen.) Aber auch abgesehen von der methodischen Reinheit ergeben sich auf diese Art auch neue Resultate. Ferner zeigt sich, daß viele Resultate der Riemannschen Geometrie — so gewisse Sätze von *Hadamard*, *Cartan*, *Cohn-Vossen*, *Nielsen* u. a. — sich in viel allgemeinerer Form beweisen lassen, so daß „sich die Nichtexistenz von konkreten geometrischen Tatsachen in Finslerschen Räumen im Vergleich mit Riemannschen Räumen als Sage erweist". Der hier benützte fundamentale Raumbegriff ist der sogenannte G-Raum. Es möge (xyz) (wobei x, y, z Elemente eines metrischen Raumes seien) bedeuten, daß y zwischen x und z liegt (y liegt — im Sinne einer Definition von *Menger* — zwischen x und z, wenn für die Abstände dieser Punkte die Beziehung gilt: $xy + yz = xz$). Ein G-Raum ist dann ein metrischer Raum, in dem jede beschränkte unendliche Menge mindestens einen Häufungspunkt hat, in dem zu jedem Paar von Punkten x, z ein y mit (xyz) existiert und ferner folgendes gilt: 1. Zu jedem Punkt des Raumes gibt es eine Kugel mit positivem Radius, so daß für je zwei Punkte x, y dieser Kugel ein dritter solcher Punkt z mit (xyz) existiert („Lokale Prolongierbarkeit"). 2. Aus (xyz), (xyw) und $yz = yw$ folgt $z = w$ („Eindeutige Prolongierbarkeit"). Es zeigt sich, daß das Konzept des G-Raumes schon eng genug ist, um zusammen mit einigen dimensionstheoretischen und gruppentheoretischen Forderungen viele konkrete geometrische Tatsachen erhalten zu können. Leider können wir nicht weiter auf den Inhalt eingehen und geben daher nur noch die Kapitelüberschriften an: 1. Die Grundbegriffe; 2. Desarguessche Räume; 3. Senkrechte und Parallele; 4. Überlagerungsräume; 5. Der Einfluß des Vorzeichens der Krümmung auf die geodätischen Linien; 6. Homogene Räume.

Das Buch ist klar und sorgfältig abgefaßt und gut verständlich; allerdings sind an einigen Stellen geringe Vorkenntnisse aus der Dimensionstheorie und der Theorie der kontinuierlichen Gruppen erforderlich. Jeder an den Grundlagen der Geometrie interessierte Leser wird sich über dieses Werk freuen.

K. Prachar, Wien

Ebene Kinematik. Von *W. Blaschke* und *H. R. Müller*. (Mathematische Einzelschriften: Band 5.) Mit 100 Textabb., 269 S. München: R. Oldenbourg. 1956. Geb. DM 26.80.

Das vorliegende Werk, von *H. R. Müller* nach Aufzeichnungen zu Hamburger Universitätsvorlesungen *W. Blaschkes* verfaßt und mit manchen eigenen Beiträgen ausgestattet, bietet einen anregenden Streifzug durch das reizvolle Gebiet der Bewegungsgeometrie: Zunächst in der Ebene, doch soll ein zweiter der räumlichen Kinematik gewidmeter Band nachfolgen. Grundsätzlich auf dem Boden der euklidischen Metrik stehend bringt der erste und umfangreichste Abschnitt die wichtigsten differentialgeometrischen Eigenschaften zwangläufiger ebener Bewegungsvorgänge, daneben aber auch viel Tatsachenmaterial über spezielle Getriebe und die von ihnen erzeugten Kurven, welche für die angewandte Kinematik Bedeutung erlangt haben. Die vorwiegend analytische Behandlung stützt

sich nach französischem Vorbild auf die systematische Verwendung „begleitender Zweibeine" und setzt häufig auch das adäquate und besonders vorteilhafte Hilfsmittel der komplexen Zahlen ein; das geometrisch-konstruktive Prinzip kommt jedoch gleichfalls zur Geltung. (Beim Beweis des Satzes von *Kempe* über die Erzeugbarkeit beliebiger algebraischer Kurven durch Gelenksmechanismen wären übrigens die eingeführten Gleithülsen noch durch Geradführungen zu ersetzen). — Das folgende Kapitel befaßt sich mit Fragen „im Großen" und bringt vor allem zahlreiche interessante Sätze über die Flächen, Umfänge und Schwerpunkte von Punkt- und Hüllbahnen geschlossener Bewegungsvorgänge. — Der dritte Abschnitt behandelt flächenläufige (zweiparametrige) Bewegungsvorgänge, bedient sich alternierender Differentialformen und zieht Begriffsbildungen der Integralgeometrie heran. Er stellt, ebenso wie das der „kinematischen Abbildung" gewidmete Schlußkapitel, ausschließliches geistiges Eigentum von *Blaschke* dar. Die genannte, bereits klassisch gewordene Abbildung stellt bekanntlich einen bemerkenswerten Zusammenhang zwischen euklidischer Kinematik der Ebene und einer „quasielliptischen" Geometrie im Raum dar, wobei beispielsweise die Eigenschaften der zweigliedrigen Bewegungsvorgänge einfache flächentheoretische Deutungen erfahren.

Das Buch — nicht für Techniker geschrieben! — atmet echten *Blaschke*'schen Geist und bezaubert durch die Originalität und Verschiedenartigkeit der Gesichtspunkte sowie durch die Eleganz in der Handhabung des analytischen Apparates. Trotz des billigen Herstellungsverfahrens macht es auch äußerlich einen sehr ansprechenden Eindruck. *W. Wunderlich*, Wien

Mechanik der Kontinua. Von *G. Hamel* †. Herausgegeben von *I. Szabó*. Mit 65 Textabb., 210 S. Stuttgart: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft. 1956. Geb. DM 29.70.

Die vorliegende Mechanik der Kontinua von dem großen deutschen Altmeister der Mechanik beinhaltet im wesentlichen die Theorie der idealen und zähen Flüssigkeiten (denen sich einige wenige Ausführungen über allgemeinere deformierbare Systeme mit Aufgaben des *Hooke*schen Gesetzes zugesellen) soweit sie durch die *Euler*schen bzw. *Stokes-Navier*schen Gleichungen mathematisch exakt beschrieben werden können. Einer jeweils außerordentlich klaren Grundlegung schließen sich verschiedene Einzelausführungen an, von denen insbesondere die über die exakten Lösungen der *Stokes-Navier*schen Gleichungen, da weitgehend vom Autor selbst herrührend, mit einer besonderen Meisterschaft vorgetragen werden. Daß bei allen diesen vom Standpunkt des Mathematikers meisterlichen Ausführungen der Standpunkt des Physikers manchmal zu kurz kommt, zeigen z. B. *Hamels* Ausführungen über das Stabilitätsproblem der *Hagen-Poiseuille*'schen Strömung in kreiszylindrischen Rohren, wo behauptet wird, daß mathematische Untersuchungen die Stabilität dieser Strömung bewiesen hätten. Dies ist aus zweierlei Gründen nicht korrekt: 1. berücksichtigen die meisten Stabilitätsuntersuchungen nur die Laminarströmungen zwischen parallelen Wänden, wobei es erst einer weitergehenden Untersuchung bedürfte, ob die für derartige Strömungen erzielten Resultate auch für Strömungen in Rohren verbindlich sein müßten und 2. wurden in den letzten Jahren von etwa 1943 ab sehr plausible Argumente für eine Instabilität zumindest dieser Strömungen zwischen parallelen Wänden, auch soweit sie exakte Lösungen der *Stokes-Navier*schen Gleichungen darstellen, gefunden. Ferner wird zwar das Stokessche Problem des Widerstandes einer Kugel bei gleichförmiger Bewegung in einer zähen Flüssigkeit einschließlich der *Oseen*schen Verbesserungen ausführlich erörtert, ohne daß

die für die physikalischen Anwendungen fundamentale *Basset*sche Gleitkorrektur auch nur erwähnt wird. Natürlich sollen und wollen diese vom Standpunkt des Physikers zu machenden Hinweise keineswegs die hervorragende Schönheit des Hamelschen Werkes schmälern, dessen Lektüre bei allen Hydrodynamikern erneute Begeisterung für ihre so schöne Wissenschaft auslösen wird.

Th. Sexl, Wien

Die Mechanik des schwimmenden Körpers. Von *A. Czwalina*. Mit 53 Textabb., 129 S. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig KG. 1956. Geb. DM 12.—.

Angeregt durch das Archimedische Werk „Über schwimmende Körper" berechnet der Verfasser die Bedingungen, unter denen das stabile Schwimmen für folgende Körper stattfindet: Drehkegel, Drehzylinder, Tetraeder, Okaeder, Kugelsegment und Kugelsektor, Drehparaboloid und parabolischen Zylinder, für Ellipsoidteile und einige Hohlkörper.

Der breiten Darstellung können bereits begabtere Schüler der 7. und 8. Klasse unserer Mittelschulen folgen. *J. Laub*, Wien

Theoretische Physik. Von *F. Hund*. Band III: Wärmelehre und Quantentheorie. Zweite, neubearbeitete Auflage des IV. und V. Bandes der „Einführung in die theoretische Physik". Mit 93 Textabb., VIII, 400 S. Stuttgart: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft. 1956. DM 27.60, geb. DM 29.60.

Die Einführung in die theoretische Physik des gleichen Verfassers erschien nach 1945 in erster Auflage in 5 Bänden (Mechanik, Elektrizität, Optik, Wärmelehre, Quantentheorie). Als zeitlich erster Band der Neubearbeitung des Gesamtwerkes legt der Verfasser den dritten Band vor, der die früheren Bände 4 (Wärmelehre) und 5 (Quantentheorie) in einen einzigen zusammenfaßt. Ihm soll bald ein erster Band Mechanik und ein zweiter Band Theorie der Elektrizität und des Lichtes nachfolgen. Der frühere vierte Band (Kap. I bis VIII der vorliegenden Neubearbeitung) war der umfangreichste gewesen, was einerseits wohl daran gelegen war, daß mehrere Teilgebiete (Theorie der Wärmeleitung, klassische Thermodynamik, Wärmestatistik und Wärmestrahlung) vereinigt waren, andererseits aber auch das historisch erste Auftreten der Quantentheorie in der Wärmestrahlung voll berücksichtigt war. Der frühere fünfte Band mit der weiteren historischen Entwicklung der Quantentheorie (Bohrsche Theorie des Atombaues auf Grund des Korrespondenzprinzipes, die Broglesche Theorie der Materiewellen und Schrödingersche Wellenmechanik) fügt sich gewissermaßen als Fortsetzung der Neubearbeitung sachgemäß und lückenlos ein (Kap. IX bis XV). Als besonders bemerkenswertes, völlig neu geschriebenes Kap. XVI erscheint eine wohlgelungene, logisch geordnete Grundlegung der Quantenmechanik. Ein wissenschaftgeschichtlicher Anhang schließt den Band ab. Die Darstellung der Quantenmechanik greift stets auf das klassische Teilchenbild und auf das anschauliche Feldbild der Materie zurück und weist deren gegenseitige Einschränkung nach. Durch den Übergang des Werkes in den Teubnerschen Verlag hat der vorliegende Band das normale Format, das dem Auge wohlvertraute Druckbild und den schönen Leineneinband der Teubnerschen Verlagswerke erhalten. Alle Studenten, denen die Einführung in die theoretische Physik von *Cl. Schaefer* aus inneren oder äußeren Gründen zu umfangreich ist, werden gerne nach dem kürzeren Hundschen Werke greifen. *Th. Sexl*, Wien

Lehrbuch der theoretischen Physik. Von *W. Weizel.* Zweite, verbesserte Auflage. 1. Band: Physik der Vorgänge. Bewegung, Elektrizität, Licht, Wärme. Mit 283 Textabb., XVI, 804 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1955. Geb. DM 69.60.

Der erste Band weist die gleichen Vorzüge auf, welche schon bei der Besprechung des zweiten Bandes (Mh. Math. **55**, 261, (1951)) hervorgehoben wurden. Auch die Tatsache, daß schon innerhalb kurzer Zeit eine zweite Auflage für den ersten Band erforderlich war, zeigt, daß dieses Buch wirklich den Bedürfnissen des Physikers entspricht. Da der erste Band in dieser Zeitschrift nicht besprochen wurde, so soll auf den Inhalt etwas näher eingegangen werden. Es umfaßt die sogenannte klassische Physik, nämlich Mechanik des Punktes und des Kontinuums, Elektrodynamik, Optik, Relativitätstheorie und Termodynamik und Wärmeleitung. Der Grundriß der Darstellung ist natürlich bei solchen so oft behandelten Teilen der Physik vorgezeichnet, aber der Verfasser versteht es, doch durch manche originelle Wendung und durch Eingehen auf gewisse Schwierigkeiten, die sich gerade dem Studierenden oft in den Weg stellen, ein durchaus eigenständiges Werk zu schreiben. Außerdem hat der Verfasser gewisse Dinge ausführlicher behandelt als es sonst üblich ist. Um nur einige Beispiele herauszugreifen: Turbulenz, Überschallströmung, Vierpoltheorie der Schaltungen, Geometrische Optik, wo sogar die Fehlertheorie ziemlich vollständig behandelt wird.

Das Buch kann nur allen Studierenden der Mathematik, Physik und Chemie wärmstens empfohlen werden. Der Verlag hat das Buch in gewohnter Weise hervorragend ausgestattet. *E. Hlawka*, Wien

Grundlagen der Quantenmechanik. Von *D. J. Blochinzew.* Nach der zweiten Auflage übersetzt von D. Lyons. (Hochschulbücher für Physik: Band 4.) Mit 83 Textabb., XII, 542 S. Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1953. DM 26.70.

Diese Einführung in die Quantenmechanik zeichnet sich durch große Klarheit und Ausführlichkeit aus, ohne weitschweifig zu sein. Die Anwendungen, welche sehr geschickt ausgewählt wurden, werden nicht durch zu viele Details belastet, so daß stets der Gedankengang deutlich sichtbar wird. Das Buch ist neben einer Vorlesung und besonders zum Selbststudium hervorragend geeignet und setzt keine speziellen Vorkenntnisse voraus. *E. Hlawka*, Wien

L'Interprétation Physique de la Mécanique Ondulatoire et des Théories Quantiques. Von *P. Février.* VIII, 216 S. Paris: Gauthier-Villars. 1956. ffr. 3200.

In den Jahren 1926 und 1927, als die Interpretation der Quantenmechanik noch nicht ihre „Kopenhagener Form" angenommen hatte, veröffentlichte *L. de Broglie* seine erstaunliche Hypothesê der l'onde pilote („Führungswelle"). Auf dem Solvay-Kongreß des Jahres 1927 ließ er sich jedoch von den damals anwesenden Gelehrten *Bohr*, *Born*, *Heisenberg* und *Pauli* zur statistischen Interpretation der Quantenmechanik bekehren. Da *Bohm* (Phys, Rev. Jänner 1952) kürzlich die *Broglie*sche Idee der Führungswelle wieder aufgriff und außerdem *Vigier* gewisse Schwierigkeiten der ursprünglichen Formulierung beseitigen konnte, ist die Diskussion um die *Broglie*sche Theorie unter den Physikern wieder in Gang gekommen und es scheint von großem Interesse zu sein, die verschiedenen Gesichtspunkte und Gegenargumente zusammenfassend darzustellen. Dabei hat sich die Diskussion weitgehend auf die erkenntnistheoretischen Grundlagen

der Physik verlagert und insbesondere auf die Frage nach der Zulässigkeit verborgener Parameter in der Quantentheorie zugespitzt. Nach Ansicht der Autorin handelt es sich bei der Konzeption der Idee der „Komplementarität" von *N. Bohr* um die Aufstellung einer neuen Denkkategorie im *Kant*schen Sinne, die in den Ideen der üblichen Schulphilosophie eben nicht enthalten ist. Für die theoretische Physik selbst handelt es sich dabei nach der Autorin bloß um eine Frage der „Zweckmäßigkeit", nicht der „Richtigkeit". Um eine erkenntnistheoretische Vergleichsmöglichkeit der verschiedenen Interpretationen der Quantenmechanik zu ermöglichen, beginnt die Verf. mit einer ausführlichen Wiedergabe der Theorie der Vorhersagen von *J. L. Destouches*, um dann zu einer Theorie der Messungen überzugehen. In einem sehr schönen Kapitel über die logische Struktur der physikalischen Theorien werden die verschiedenen Interpretationen der Quantenmechanik übersichtlich und klar zusammengestellt.

Th. Sexl, Wien

La Cinématique Relativiste. Von *H. Arzeliès*. XII, 232 S. Paris: Gauthier-Villars. 1955. ffr. 2500.

Die 50-Jahr-Feier des Erscheinens der grundlegenden Abhandlung von *A. Einstein* „Zur Elektrodynamik bewegter Körper" hält der Autor für den geeigneten Zeitpunkt, um die fundamentale Bedeutung der speziellen Relativitätstheorie für die gesamte Physik in einer zusammenfassenden Darstellung zu würdigen. Nach dem Autor existiert bisher in der französischen Literatur keine geeignete Lehrbuchliteratur über die spezielle Relativitätstheorie, da sich die bisherigen Darstellungen entweder als Popularisierungen erweisen oder sich wegen der vorausgesetzten hohen mathematischen Kenntnisse an einen sehr engen Leserkreis wenden. Von wenigen löblichen Ausnahmen abgesehen ignorieren ferner nach dem Autor die französischen Lehrpläne und Dozenten die Existenz einer speziellen Relativitätstheorie.

Die vorliegende Darstellung bildet den ersten Band einer den Anwendungen der speziellen Relativitätstheorie gewidmeten Serie. Der Autor hofft in Kürze einen zweiten Band über die relativistische Dynamik und ihre Anwendungen vorlegen zu können.

Was den vorliegenden ersten Band betrifft, so beschränkt sich dieser bewußt auf die einfachsten mathematischen Hilfsmittel, so daß selbst die vierdimensionale Darstellung der speziellen Relativitätstheorie nur anhangsweise behandelt wird. Zunächst werden einleitend Betrachtungen über die Messung von Längen und Zeiten, über die Wahl von Bezugsystemen und über die Struktur physikalischer Theorien gebracht. Daran schließt sich die relativistische Kinematik an, wo in einzelnen Kapiteln die Lorentz-Transformation, die Transformation von Längen und Zeiten, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen ausführlich behandelt werden. Auf ein ausführliches und schön geschriebenes Kapitel über das Problem der rotierenden Scheibe, wo der Autor neue Resultate zu geben beansprucht, folgt ein Schlußkapitel über die *Minkowski*-Welt. Jedem Kapitel ist ein wertvolles, sehr ausführliches Literaturverzeichnis beigegeben. *Th. Sexl*, Wien

Herausgeber, Eigentümer und Verleger: Springer-Verlag, Wien, I., Mölkerbastei 5. - Für den Inhalt verantwortlich: Prof. Dr. Nikolaus Hofreiter, Wien, IV., Schelleingasse 39. - Druck: Tiroler Graphik, Ges. m. b. H., Innsbruck, Innrain 27—29

Elektromechanische Schaltungen und Schaltgeräte

Eine Einführung in Theorie und Berechnung

Von Dipl.-Ing. Dr. techn. **Otto Plechl**

Weiland techn. Direktor der Elin A.G. für elektrische Industrie und Privatdozent der Technischen Hochschule Wien

Ergänzt und bearbeitet von

Dr. phil. **Werner Rieder**

Elin A.G. für elektrische Industrie und Technische Hochschule Wien

Mit 113 Textabbildungen. V, 224 Seiten. Gr.-8°. 1956

Ganzleinen S 144.–, DM 24.–, sfr. 24.50, $ 5.70

Im vorliegenden Buch wird gezeigt, wie man Schaltungen auf mathematischem Wege entwickeln kann, wobei nur solche mathematischen Kenntnisse vorausgesetzt werden, die jedem Ingenieur geläufig sind. Die in diesem Buche dargestellte exakte Berechnung von Schaltungen führt nicht nur automatisch und stets sicher zum Ziel, sie zeigt auch sämtliche möglichen Schaltungsformen und gestattet die Auswahl der für einen bestimmten Fall günstigsten (z. B. bei einem Minimum an Kontakten oder Leitungen zwischen zwei vorgegebenen Punkten). Zahlreiche Beispiele machen den Praktiker mit der unerwartet leistungsfähigen Methodik des Verfassers vertraut und überzeugen davon, daß der exakten Wissenschaft ein praktisch höchst bedeutsamer Vorstoß in ein Gebiet der Technik gelungen ist, in dem man sich bisher nur durch Probieren und mit Hilfe mehr oder weniger unzuverlässiger Regeln und zufälliger Erfindungen vorwärtstasten konnte.

Acta Physica Austriaca. Unter Mitwirkung der Österreichischen Akademie der Wissenschaften herausgegeben von Fritz Regler, Wien, und Hans Thirring, Wien. Schriftleitung: **Paul Urban**, Graz.

Zuletzt erschien:

Band 10, Heft 3. (Ausgegeben im August 1956.) Mit 84 Textabbildungen. 144 Seiten. 1956. S 198.–, DM 33.–, sfr. 33.80, $ 7.85.

Inhaltsverzeichnis: **Seidl, Franziska.** Über die Einwirkung verschiedener Strahlenarten auf Piezoquarze und Schwingkristalle. — **Ortner, G.** Einfluß des Lichtes auf das Beweglichkeitsspektrum atmosphärischer Ionen. — **Higatsberger, M. J.** Ausheizbare Hochvakuumdichtungen. — **Knizak, J.** Messung inhomogener magnetischer Felder in engen Spalten. — **Weinzierl, P.** Über die Wahl von Auflösungsvermögen und Quellenstärke bei Koinzidenzexperimenten. — **Brukl, A.** und **L. Balcarczyk.** Zur Bestimmung der Kohlensäure in Luft. — **Reeger, E.** Über Beobachtung und Photographie von Luftspiegelungen. — **Desoyer, Elisabeth.** Zur Natur der photophoretischen Kräfte. — **Rohatschek, H.** Zur Theorie der Gravitophotophorese. — **Blaha, F.** Tertiäre Basistranslation von Zn-Kristallen. — **Preining, O.** Ein experimenteller Beitrag zum Wärmeleitungsproblem bei der Differentialthermoanalyse. — **Schedling, J. A.** und **J. Wein.** Differentialthermoanalytische Untersuchung der exothermen Reaktion von $CaSO_4 \cdot 2\,H_2O$. — **Hittmair, O.** Stripping-Reaktionen virtuellen Niveaus. — **Penfield, R. H.** and **H. Zatzkis.** Invariance Requirements and Conservation Laws. — **Rohatschek, H.** Über die Kräfte der reinen Photophorese und der Gravitophotophorese. — **Sexl, Th.** und **E. Spurny.** Zur anschaulichen Deutung des Auftretens von Energiebändern in einem periodischen Potentialfeld. — *Buchbesprechungen.*

SPRINGER-VERLAG IN WIEN I

Der seit 1955 vergriffene Band I liegt nunmehr in zweiter, neu bearbeiteter Auflage vor

Vorlesungen über höhere Mathematik

Von Dr. phil. **Adalbert Duschek**

o. Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule Wien

Band I: **Integration und Differentiation der Funktionen einer Veränderlichen. Anwendungen. Numerische Methoden. Algebraische Gleichungen. Unendliche Reihen**

Zweite, neu bearbeitete Auflage

Mit 169 Textabbildungen. XII, 440 Seiten. Gr.-8°. 1956

S 270.—, DM 45.—, sfr. 46.10, $ 10.70

Ganzleinen S 288.—, DM 48.—, sfr. 49.10, $ 11.45

Die zweite Auflage dieses ersten Bandes ist nach verhältnismäßig kurzer Zeit notwendig geworden. Das Buch ist vom Verfasser einer gründlichen Revision unterzogen worden, die bei einigen Kapiteln zu einer völligen Neufassung geführt hat. Der Zweck dieser Umarbeitung war, dem Ziel, das sich der Verfasser von Anfang an gestellt hatte, noch besser zu entsprechen: eine Darstellung zu schaffen, die auch für den Physiker und Techniker gut lesbar ist, ohne dabei die Exaktheit der Formulierung und Beweisführung zu opfern, die der Mathematiker mit guten Gründen auch in diesem Fall für unerläßlich hält. In der Anordnung des Stoffes unterscheidet sich die Neuauflage nur unwesentlich von der ersten: der Abschnitt über die unendlichen Reihen wurde vom zweiten in den ersten Band verlegt, während die Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendungen eine zusammenhängende Darstellung in der nächsten Auflage des zweiten Bandes erfahren werden.

Früher erschienen:

Band II: **Unendliche Reihen. Integration und Differentiation der Funktionen von mehreren Veränderlichen. Abschluß der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Fehlertheorie und Ausgleichsrechnung. Lineare Algebra. Tensorfelder.** Mit 125 Textabbildungen. VI, 386 Seiten. Gr.-8°. 1950.

Ganzleinen S 174.—, DM 29.—, sfr. 30.—, $ 6.90

Band III: **Gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen. Variationsrechnung. Funktionen einer komplexen Veränderlichen.** Mit 107 Textabbildungen. IX, 512 Seiten. Gr.-8°. 1953.

S 220.—, DM 36.50, sfr. 37.40, $ 8.70

Ganzleinen S 235.—, DM 38.80, sfr. 39.80, $ 9.25

In Vorbereitung:

Band IV: **Randwertprobleme. Reihenentwicklungen. Integralgleichungen. Laplace-Transformation.**